Mathématiques CC du module 242

Durée : *2 heures.*

Barème indicatif : *ex. n°1 : 3,5 pts ; ex. n°2 : 5 pts ; ex. n°3 : 6,5 pts ex. n°4 : 5 pts.*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice n°1 : (pour les B) Matrice orthogonale

1. Montrer que la matrice $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

2. vérifier que $det(A) = -1$, puis déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice n°1 : (pour les A) Extrema

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$.
Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice n°2 : Système différentiel

Résoudre sur $\mathbf{R}$ le système différentiel homogène (H) puis le système différentiel (S) avec :

$$(H) : \begin{cases} x' = 2y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x + 2y \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S) : \begin{cases} x' = 2y + z + 1 \\ y' = x + y + z + 2 \\ z' = x + 2y + 1 \end{cases}$$

Exercice n°3 : Équation différentielle

1. On considère sur $\mathbf{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante :

$$(H) : (t^2 + t)y'' + ty' - y = 0$$

a. Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{at+b}{t^2} + \frac{c}{1+t}$$

b. Déterminer une solution de l'équation (H), en la cherchant sous la forme $t \longmapsto t^\alpha$.

c. Résoudre (H).

2. En faisant le changement de variable $t = x^2$ résoudre sur $\mathbf{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(G) : (x^2 + 1)z''(x) + \left(x - \frac{1}{x}\right)z'(x) - 4z(x) = 0$$

Exercice n°4 : Fonction de deux variables

Soit f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{2x^2y + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases} \end{array}$$

1. On admettra que f est continue sur $(\mathbf{R}^2)^*$.
La fonction f est-elle continue en $(0;0)$?

2. **a.** La fonction f admet-elle une dérivée partielle par rapport à x en $(0;0)$? par rapport à y en $(0;0)$? Calculer ces dérivées partielles en cas d'existence.

b. On admettra l'existence et la continuité des dérivées partielles de f sur $(\mathbf{R}^2)^*$.
Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ pour $(x;y) \neq (0;0)$.

c. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?