CC MM232 2020-2021

Barême : Ex1 1.5pts   Ex2 7pts   Ex3 2.5pts   Ex4 9pts

Les exercices I, II et III sont à rédiger sur une copie puis l'exercice IV sur une autre copie

---

Exercice I

1.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

2. (a) faux, en posant $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, on a $\sum u_n$ qui converge et $\sum \sqrt{u_n} = \sum \dfrac{1}{n}$ qui diverge.

   (b) faux, cette fois-ci il suffit de prendre $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a donc $\sum u_n$ qui diverge et $\sum u_n^2$ qui converge

Exercice II

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}$ est continue et positive sur $[e, +\infty[$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \neq 0$$

   donc l'intégrale J diverge.

2. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t\left(e^{\sqrt{t}}-1\right)}$ est continue et positive sur $]0, 1]$.

   Au voisinage de 0, $f(t) \sim \dfrac{\sqrt{t}}{t\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge donc par équivalence K diverge.

3. La fonction $h : x \mapsto \dfrac{arctan(x)\ln(1+\sqrt{x})}{x^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$

   Au voisinage de 0, $h(x) \sim \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge par équivalence.

   Au voisinage de $+\infty$, $f(x) \leqslant \dfrac{\frac{\pi}{2}\sqrt{x}}{x^2} \leqslant \dfrac{\frac{\pi}{2}}{x\sqrt{x}}$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ converge donc par linéarité et par majoration, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

   Conclusion : l'intégrale $L = \displaystyle\int_0^1 h(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Exercice III

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\phi(t) = \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n - t^2 - 1$$

   On a $\phi'(t) = 2t\left(\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{n-1} - 1\right) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et $\phi(0) = 0$, donc $\phi(t) \geqslant 0$. Ceci prouve l'inégalité demandée.

2. De l'inégalité précédente on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

   Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$ converge et donc par majoration $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge.