# Mathématiques CC n°1

***Durée :*** *2 heures.*

***Barème indicatif :*** *ex. n°1 : 1,5 pts ; ex. n°2 : 7 pts ; ex. n°3 : 2,5 pts ; ex. n°4 : 9 pts .*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

---

***Consignes pour les copies :***
*rendre séparément d'une part les exercices n°1 à n°3 et d'autre part l'exercice n°4.*

---

## Exercice n°1 :

**1.** Soit $\sum u_n$ une série convergente, donner $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**2.** Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (Justifier vos réponses : si l'affirmation est vraie, en donner une démonstration et si elle est fausse, produire un contre-exemple.)

- **a.** Les séries de terme général $u_n$ et $\sqrt{u_n}$ respectivement sont de même nature.
- **b.** Les séries de terme général $u_n$ et $u_n^2$ respectivement sont de même nature.

## Exercice n°2 :

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

**1.** $J = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x$

**2.** $K = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}} - 1\right)} \, \mathrm{d}t$

**3.** $L = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan(x)\, \ln(1 + \sqrt{x})}{x^2} \, \mathrm{d}x$

## Exercice n°3 :

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$ :

$$f_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

**1.** Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$ :

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{n} \geqslant 1 + t^2$$

**2.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

## Exercice n°4 :

On considère les trois intégrales :

$$C = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \qquad S = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad E = C + iS = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$$

*(Les deux questions sont indépendantes.)*

**1.** **a.** Effectuer, en justifiant la validité, le changement de variable $x = t^2$ dans l'intégrale $C$, et donner la nouvelle expression de $C$.

**b.** En faisant une intégration par parties, justifier la convergence de l'intégrale :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

**c.** Prouver la convergence de l'intégrale $C$.

**2.** **a.** On considère l'application $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2} - 1}{x^2}$$

On admettra la continuité de $f$ sur $\mathbf{R}^*$.

Prouver que $f$ est prolongeable en 0, et donner cette valeur en 0.

**b.** Justifier la convergence de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

**c.** Soit $x > 0$.

À l'aide d'une intégration par partie, déterminer le complexe $\lambda$ tel que :

$$\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}}{x} + \lambda \int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$$

**d.** En déduire la convergence de l'intégrale $E$ (qui entraîne celle de $C$).