CC MM231

barême indicatif: Ex1 7pts Ex2 3pts Ex3 4pts Ex3 6pts

Les exercices 1 et 2 sont à rédiger une copie, puis les exercices 3 et 4 sur autre copie

Exercice 1 $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 de $\mathbb{C}$. I désigne la matrice identité et O la matrice nulle.

On pose $G = \{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) | (a,b) \in \mathbb{C}^3\}$ où $M_{a,b}$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

1. On pose J la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Exprimer $M_{a,b}$ à l'aide des matrices I et J, puis en déduire que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on donnera la dimension et une base.
   Réponse :$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $M_{a,b} = bJ + (a-b)I$ donc $M_{a,b} \in Vect(I,J)$ donc $G \subset vect(I,J)$. réciproquement si $A \in vect(I,J)$ alors $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $A = \alpha J + \beta I = \alpha J + ((\beta+\alpha)-\alpha)I = M_{(\beta+\alpha),\alpha}$ et donc $A \in G$ donc $vect(I,J) \subset G$.
   En conclusion $G = vect(I,J)$ et donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$
2. Calculer J^2, puis vérifier que G est stable pour le produit matriciel.
   Réponse : On vérifie facilement que $J^2 = 3J$. Ainsi si A et $A' \in G^2$, donc $\exists (a,b),\quad (a',b')$ tels que $A = aI + bJ$ et $A' = a'I + b'J$ car $G = vect(I,J)$, donc $AA' = aa'I + ab'J + a'bJ + bb'J^2$, soit $AA' = aa'I + (ab' + a'b + bb')J$ donc $AA' \in G$ et G est stable pour le produit matriciel.
3. On note E le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme ayant comme matrice $M_{a,b}$ dans $\mathcal{B}$. Donner une base de $F = ker(u - (a-b)Id_E)$, Id_E désigne l'endomorphisme identité de E.
   Réponse : Soit $v(x,y,z) \in F$, ceci équivaut à
   $$\left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Soit $x + y + z = 0$. Une base de F est $(e'_2(1,-1,0), e'_3(1,0,-1))$
4. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, avec $e'_1(1,1,1)$, $e'_2(1,-1,0)$ et $e'_3(1,0,-1)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E, puis donner la matrice, D, de u dans $\mathcal{B}'$
   réponse : $det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$, on additionne les deux dernières colonnes à la première. Ce déterminant n'est pas nul donc $\mathcal{B}'$ est une base.
   On a $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+2b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $u(e'_1) = (a+2b)e'_1$
   $e'2$ et e'_3 appartiennent à F donc $u(e'_2) = (a-b)e'_2$ et $u(e'_3) = (a-b)e'_3$. la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ s'écrit donc : $D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$
5. Pour tout entier naturel, non nul n, donner D^n
   Réponse : on montre facilement par récurrence que $D^n = \begin{pmatrix} (a+2b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^n \end{pmatrix}$
6. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Écrire P et vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Réponse : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on vérifie facilement que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$

7. Exprimer $M_{a,b}$, puis $M_{a,b}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) en fonction de P, D et P^{-1}. $M(a,b)$ et D sont respectivement les matrices du même endomorphisme u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. D'où la relation : $M_{a,b} = PDP^{-1}$ ce qui donne, pour tout entier naturel n, $M_{a,b}^n = PD^nP^{-1}$

Exercice 2 On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la relation :

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x+3y, 3x+y)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et en déduire que $f^2 = \frac{1}{2}(f + Id_{\mathbb{R}^2})$, où $Id_{\mathbb{R}^2}$ désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$
Réponse : Notons $\mathcal{B}\,(e_1(1,0); e_2(0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a $f(e_1) = f(1,0) = \frac{1}{4}(1,3)$ et $f(e_2) = f(0,1) = \frac{1}{4}(3,1)$. Ainsi la matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer $Ker(f - Id_{\mathbb{R}^2})$ et $Ker(f + \frac{1}{2}Id_{\mathbb{R}^2})$, puis montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Réponse :

$$(x,y) \in Ker(f - Id_{\mathbb{R}^2}) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -3x + 3y = 0$$

On en déduit que $Ker(f - Id_{\mathbb{R}^2}) = vect(1,1)$. de même que :

$$(x,y) \in Ker(f + \frac{1}{2}Id_{\mathbb{R}^2}) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3x + 3y = 0$$

On en déduit que $Ker(f - Id_{\mathbb{R}^2}) = vect(1,-1)$
Les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ de $\mathbb{R}^2$ sont libres donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$ et donc les sous-espaces $Ker(f - Id_{\mathbb{R}^2})$ et $Ker(f + Id_{\mathbb{R}^2})$ sont supplémentaires.

Exercice 3 Cas général de l'exercice 2 :
E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n appartenant à N^*. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.
On considère un endomorphisme f de E vérifiant $f^2 = \frac{1}{2}(f + Id_E) \quad (*)$.

1. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de Id_E et de f.
Réponse : L'égalité ci-dessus s'écrit : $f\,(2f - Id_E) = (2f - Id_E)\,f = Id_E$. On en déduit que f est inversible et que :

$$f^{-1} = 2f - Id_E$$

2. Montrer que $E = ker(f - Id_E) \oplus ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$
Réponse : $ker(f - Id_E)$ et $ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$ donc leur somme est inclus dans E.
Réciproquement, Soit x un élément de E supposons qu'il existe y et z deux éléments appartenant respectivement à $E = ker(f - Id_E)$ et $ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$ tels que $x = y + z \quad (1)$. On a donc $f(y) = y$ et $f(z) = -\frac{1}{2}z$, donc d'après (1) $f(x) = y - \frac{1}{2}z \quad (2)$. En utilisant les égalités (1) et (2), on a bien nécessairement $y = \frac{1}{3}\left(x + 2f(x)\right)$ et $z = \frac{2}{3}\left(x - f(x)\right)$. Réciproquement, on vérifie que $y + z = x$ et que

$$(f - Id_E)\,(y) = f(y) - y = \frac{1}{3}\left(f(x) + 2f^2(x)\right) - \frac{1}{3}\left(x + 2f(x)\right) = \frac{1}{3}\left(2f^2(x) - f(x) - x\right) = 0 \text{ d'après (*)}$$

. De mme

$$f + \frac{1}{2}Id_E)(z) = \frac{2}{3}\left(f(x) - f^2(x) + \frac{1}{2}(x - f(x))\right) = \frac{1}{3}\left(x + f(x) - 2f^2(x)\right) = 0 \text{ d'après (*)}$$

L'unicité de cette décomposition permet donc d'écrire : $E = ker(f - Id_E) \oplus ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$

3. Calculer $(f+\frac{1}{2}Id_E)\circ(f-Id_E)$. En déduire que $ker(f+\frac{1}{2}Id_E)=Im(f-Id_E)$
Réponse : On a, $(f+\frac{1}{2}Id_E)\circ(f-Id_E)=f^2-\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}Id_E=0$ d'après (*). Donc si $y\in Im(f-Id_E)$, alors il $x\in E$ tel que $y=(f-Id_E)(x)$ donc en composant par $(f+\frac{1}{2}Id_E)$, on obtient, $(f+\frac{1}{2}Id_E)(y)=0$, ce qui prouve que $y\in ker(f+\frac{1}{2}Id_E)$ et que $ker(f+\frac{1}{2}Id_E)\subset Im(f-Id_E)$. Or on a prouvé que $E=ker(f-Id_E)\oplus ker(f+\frac{1}{2}Id_E)$, donc $dim(E)=dim\left(ker(f-Id_E)\right)+dim\left(ker(f+\frac{1}{2}Id_E)\right)$, soit d'après le théorème du rang :

$$dim(E)=dim(E)-dim\left(Im(f-Id_E)\right)+dim\left(ker(f+\frac{1}{2}Id_E)\right)$$

Et par la suite $dim\left(ker(f+\frac{1}{2}Id_E)\right)=dim\left(Im(f-Id_E)\right.$. D'où l'égalité : $ker(f+\frac{1}{2}Id_E)=Im(f-Id_E)$

Exercice 4 Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie, Id_E l'identité dans E et 0_E l'endomorphisme nul sur E.

1. Dans cette question, E est de dimension 3. On considère dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de E. D désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1=e_1-e_3$ et P le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2=e_1-e_2$ et $\varepsilon_3=-e_1+e_2+e_3$.
   (a) Montrer que D et P sont supplémentaires puis déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à D.
   (b) En déduire alors la matrice de la symétrie par rapport P parallèlement à D
2. Dans la suite de l'exercice, p et q désignent deux projecteurs de E, où E est un espace vectoriel de dimension n.
   (a) Soit $x\in E$ tel que $p(x)=q(x)$, calculer $(Id_E-p\circ q)\circ p(x)$
   (b) Calculer $(p+q)\circ(Id_E-p)(x)$
   (c) On suppose que $p+q$ et $Id_E-p\circ q$ sont injectifs. Montrer que $p-q$ est injectif