CC MM231

barême indicatif: Ex1 7pts Ex2 3pts Ex3 4pts Ex3 6pts

Les exercices 1 et 2 sont à rédiger une copie, puis les exercices 3 et 4 sur autre copie

Exercice 1 $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 de $\mathbb{C}$. I désigne la matrice identité et O la matrice nulle.

On pose $G = \{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) | (a,b) \in \mathbb{C}^3\}$ où M_a, b désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

1. On pose J la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Exprimer $M_{a,b}$ à l'aide des matrices I et J, puis en déduire que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on donnera la dimension et une base.
2. Calculer J^2, puis vérifier que G est stable pour le produit matriciel.
3. On note E le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme ayant comme matrice $M_{a,b}$ dans $\mathcal{B}$. Donner une base de $F = ker(u-(a-b)Id_E)$, Id_E désigne l'endomorphisme identité de E.
4. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, avec $e'_1(1,1,1)$, $e'_2(1,-1,0)$ et $e'_3(1,0,-1)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E, puis donner la matrice, D, de u dans $\mathcal{B}'$
5. Pour tout entier naturel, non nul n, donner D^n
6. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Écrire P et vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
7. Exprimer $M_{a,b}$, puis $M_{a,b}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ en fonction de P, D et P^{-1}.

Exercice 2 On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la relation :

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x+3y, 3x+y)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et en déduire que $f^2 = \frac{1}{2}(f + Id_{\mathbb{R}^2})$, où $Id_{\mathbb{R}^2}$ désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$
2. Déterminer $Ker(f - Id_{\mathbb{R}^2})$ et $Ker(f + \frac{1}{2}Id_{\mathbb{R}^2})$, puis montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Cas général de l'exercice 2 :
E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n appartenant à N^*. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.
On considère un endomorphisme f de E vérifiant $f^2 = \frac{1}{2}(f + Id_E)$.

1. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de Id_E et de f.
2. Montrer que $E = ker(f - Id_E) \oplus ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$
3. Calculer $(f + \frac{1}{2}Id_E) \circ (f - Id_E)$. En déduire que $ker(f + \frac{1}{2}Id_E) = Im(f - Id_E)$

Exercice 4 Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie, Id_E l'identité dans E et 0_E l'endomorphisme nul sur E.

1. Dans cette question, E est de dimension 3. On considère dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. D désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 - e_3$ et P le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$ et $\varepsilon_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
   (a) Montrer que D et P sont supplémentaires puis déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à D.

(b) En déduire alors la matrice de la symétrie par rapport P parallèlement à D

2. Dans la suite de l'exercice, p et q désignent deux projecteurs de E, où E est un espace vectoriel de dimension n.
   (a) Soit $x \in E$ tel que $p(x) = q(x)$, calculer $(Id_E - p \circ q) \circ p(x)$
   (b) Calculer $(p + q) \circ (Id_E - p)(x)$
   (c) On suppose que $p + q$ et $Id_E - p \circ q$ sont injectifs. Montrer que $p - q$ est injectif