Corrigé des exercices 4 et 5 du DS MM232

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

1. On pose $u_n = n^{\left(-1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\left(-1+\frac{1}{n}\right)\ln(n)} = e^{-\ln(n)}e^{-\frac{\ln(n)}{n}}$
   Or $e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \mapsto 1$ quand $n \mapsto +\infty$ donc $u_n \sim e^{-\ln(n)} = \frac{1}{n}$. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et donc par équivalence (c'est une série à termes positifs), $\sum u_n$ converge.
2. (a) On pose $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$
   f est définie et dérivable sur $[1, +\infty[$ et $f'(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$. Ainsi f est croissante sur $[1, e[$ et décroissante sur $[e, +\infty[$.

   (b) En utilisant les variations de f on a donc, pour tout entier $k \geqslant 4$:
   - $\forall t \in [k-1, k[, \quad \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \frac{\ln(t)}{t}$ et donc par intégration $\frac{\ln(k)}{k} = \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t}$
   - $\forall t \in [k, k+1[, \quad \frac{\ln(t)}{t} \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$ et donc par intégration $\int_{k}^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(k)}{k}$. D'où l'encadrement :

   $$\int_{k}^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t}$$

   En faisant varier k de 4 à n, un entier supérieur ou égal à 4, et en additionnant, on obtient :

   $$\int_{4}^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{3}^{n} \frac{\ln(t)}{t}$$

   Soit en intégrant :

   $$\frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(4))^2\right) \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left((\ln(n))^2 - (\ln(3))^2\right)$$

   Or $\frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(4))^2\right) \sim \frac{1}{2}\left((\ln(n))^2\right) \sim \frac{1}{2}\left((\ln(n))^2 - (\ln(3))^2\right)$
   En conclusion $u_n \sim \frac{1}{2}(\ln(n))^2$
   - D'après la question précédente $w_n = \frac{u_n}{n^2} \sim \frac{1}{2}\frac{(\ln(n))^2}{n^2}$
   Or $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}\frac{(\ln(n))^2}{n^2} = 0$ donc $w_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. La série $\sum \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ converge et donc $\sum w_n$ converge aussi par négligeabilité. Ce critère est valable car $\sum w_n$ est une série à termes positifs.

Exercice 5

1. $\forall n \geqslant 2, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\sin(x)dx = \left[-\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)dx$. On rappelle que $(\sin^{n-1})'(x) = (n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x)$. En remplaçant $\cos^2(x)$ par $1 - \sin^2(x)$, on obtient l'égalité $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ ce qui donne le résultat souhaité : $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.
   Un simple calcul donne $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
2. (a) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ d'où en multipliant par $\sin^{n-1}(x)$ on a $0 \leqslant \sin^n(x) \leqslant \sin^{n-1}(x)$.
   En intégrant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on obtient l'inégalité $I_n \leqslant I_{n-1}$. La suite (I_n) est donc décroissante.
   Pour tout entier n, $\frac{\pi}{2} = I_0 \leqslant I_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n > 0$

   (b) La suite (I_n) est décroissante donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $I_{2p+1} \leqslant I_{2p} \leqslant I_{2p-1}$ $(*)$

(c) En utilisant les inégalités précédentes et en divisant par I_{2p+1}, sachant qu'on a prouvé qu'il est strictement positif, on obtient :$1 \leqslant \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leqslant \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}}$
Or $\frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p+1)2p}{4p^2} \sim \frac{4p^2}{4p^2} \to 1$. D'où par encadrement :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$$

(d) Les termes I_n sont non nuls donc : $\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}} = 1$

3. Soit n un entier naturel $\geqslant 2$, on a :

$$(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{n-1}{n}I_{n-2}\frac{n}{n+1}I_{n-1} = (n-1)I_{n-2}I_{n-1}$$

D'où par récurrence : $(n+1)I_nI_{n+1} = 1I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$

4. D'après la question 2.d, $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$ donc $I_n \sim I_{n+1}$.
En utilisant l'égalité $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $nI_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ et que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

5. Les séries $\sum I_nx^n$ et $\sum \sqrt{\frac{\pi}{2n}}|x|$ ont le même rayon de convergence. En posant donc $u_n = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}|x|^n$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}\sqrt{\frac{2n}{\pi}}|x| = |x|$$

Ainsi d'après le critère de d'Alembert :
— Si $|x| < 1$, $\sum u_n(x)$ converge donc $R \geqslant 1$
— et si $|x| > 1$, $\sum u_n(x)$ diverge, donc $R \leqslant 1$
Le rayon de convergence, R, est donc égal à 1.