CC MM232

Les exercices 2 et 4 seront rédigés ensemble et les exercices exercices 3 et 5 sur une autre copie

Les calculatrices sont interdites

barème: Ex.1 1.25 Ex2. 3pts Ex3. 2pts Ex4. 7pts Ex5.7pts

Exercice 1 Dans cet exercice on suppose que a est un réel et que f est continue et positive sur $[a, b[$
Chaque bonne réponse vous rapportera 0.25 point et une mauvaise réponse vous pénalise d'une note équivalente.

Questions	**Réponses**
1. Si $b \in \mathbb{R}$ et si $\lim_{t\to b} f(t) = 0$ alors $\int_a^b f(t)dt$	☐ converge toujours ☐ diverge toujours ☐ on ne peut pas conclure
2. Si $b \in \mathbb{R}$ et si $\lim_{t\to b} f(t) = +\infty$ alors $\int_a^b f(t)dt$	☐ converge toujours ☐ diverge toujours ☐ on ne peut pas conclure
3. Si $b = +\infty$ et si $\lim_{t\to b} f(t) = 0$ alors $\int_a^b f(t)dt$	☐ converge toujours ☐ diverge toujours ☐ on ne peut pas conclure
4. Si $b = +\infty$ et si $\int_a^b \lvert f(t)\rvert dt$ diverge alors $\int_a^b f(t)dt$	☐ converge toujours ☐ diverge toujours ☐ on ne peut pas conclure
5. Si la série $\sum q^n$ converge alors	☐ $\lvert q\rvert = 1$ ☐ $\lvert q\rvert > 1$ ☐ $\lvert q\rvert < 1$

Exercice 2 Étudier la convergence de chacune des séries suivantes, en appliquant un critère de convergence :

a. $\sum \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ b. $\sum \frac{n^2+1}{n!}$ c. $\sum \frac{sinn}{n^2+\ln(n)}$

Exercice 3 Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction de α :
a. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}-1}{t^\alpha}$ b. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{(t^2-1)^\alpha}$

Exercice 4
Dans cet exercice on admettra que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

1. Justifier, rigoureusement, la convergence des intégrales $\int_0^1 \frac{lnx}{1-x^2}dx$ et $\int_0^1 x^{2k}lnxdx$ pour tout entier naturel k.
2. n est un entier naturel et q un réel différent de 1.
   rappeler pourquoi on a : $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 + q + q^2 + ... + q^n$. En déduire, pour $x \in]0,1[$, une expression égale à $\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$ en fonction de x et de n.
3. Déduire de ce qui précède :
$$(1) \quad \int_0^1 \frac{lnx}{1-x^2}dx = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 x^{2k}lnxdx\right) + R_n$$
   où R_n est une intégrale impropre.
4. Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{2k}lnxdx = \frac{-1}{(2k+1)^2}$
5. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \frac{xlnx}{1-x^2}$
   Démontrer que f est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1. On admettra qu'elle est donc bornée sur $]0,1[$
6. En déduire qu'il existe un réel M, $M > 0$, tel que : $\forall n$, $|R_n| \leqslant \frac{M}{2n+2}$
7. Conclure en donnant la valeur de $\int_0^1 \frac{lnx}{1-x^2}dx$

Exercice 5
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}dt$.

1. Montrer que pour tout entier naturel, n, et pour tout $t \in [0;1]$, $t^{n+1} \leqslant t^n$. En déduire que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
2. Calculer $a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$, on peut utiliser le changement de variable $t = cos\theta$
3. Soit $f : t \mapsto (1-t^2)^{\frac{3}{2}}$, donner $f'(t)$, puis en déduire le calcul $a_1 = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}dt$
4. En utilisant $f'(t)$ et une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}a_n$
5. En déduire que $\frac{n+1}{n+4}a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$ puis que $a_{n+1} \sim a_n$.
6. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)(n+2)(n+3)a_na_{n+1}$ est constante. En déduire que $a_n^2 \sim \frac{6a_0a_1}{n^3}$.
7. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?