Intégrales à paramètre

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1 Présentation

Le but de ce chapitre est d'étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions du type $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$, où f est une fonction qui en plus de la variable d'intégration, ici t, elle dépend aussi d'une deuxième variable appelée paramètre, c'est la variable x.

■ **Exemple 1.1** en prenant comme fonction f celle définie par : $f : X = \mathbf{R} \times I = [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, $(x,t) \mapsto \frac{arctan(xt)}{1+t^2}$
La fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{arctant(xt)}{1+t^2} dt$
est définie pour tout réel x, en effet
$\left|\frac{arctant(tx)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{\frac{\pi}{2}}{1+t^2}$
et
$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$
On constate,aussi, que $F(0) = 0$ et que $F(-x) = -F(x)$ ■

Définition 1.1 — Intégrale à paramètre. Soient X et I deux intervalles de $\mathbf{R}$ et soit f une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ soit continue sur I et telle que $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge.
La fonction : $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur l'intervalle X et elle s'appelle, intégrale dépendant d'un paramètre

2 Continuité

Définition 2.1 — Hypothèse de domination. Soit f une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes. On dit que f vérifie l'hypothèse de domination sur $X \times I$ s'il existe une fonction ϕ continue par morceaux et intégrable sur I telle que : $\forall (x,t) \in X \times I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

R Pour trouver la fonction ϕ souvent on fait une majoration grossière. Celle-ci est souvent plus facile et aussi éfficace que de majorer par $\sup_{x \in X} |f(x,t)|$

Proposition 2.1 — Continuité d'une intégrale par rapport au paramètre (domination globale).
Si f est une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que
— Pour tout $x \in X$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;
— Pour tout $t \in I$, la fonction $f_t : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X ;
— f vérifie l'hypothèse de domination.
alors, l'application

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur X.

R Il est évident que si la fonction f est continue sur $\mathbf{R} \times I$ les deux premières conditions sont vérifiées. Le problème parfois est que la continuité des fonctions de deux variables est moins évidente à prouver.

■ **Exemple 2.1** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{sin(xt)}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$. ■

2.1 Cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de X

Il arrive, parfois, que la majoration sur tout l'ensemble X n'est pas possible, on peut dans ce cas, éventuellement, se contenter de prouver cette majoration sur tout segment de cet ensemble. C'est l'hypothèse de domination locale. D'où le théorème

Proposition 2.2 — Continuité d'une intégrale par rapport au paramètre (domination locale). Si f est une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

- Pour tout $x \in X$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- Pour tout $t \in I$, la fonction $f_t : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X ;
- pour tout segment S de X, il existe une application φ_S à valeurs réelles positives telle que $\int_I \varphi_S(t)dt$ converge.

$$\forall x \in S,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_S(t) \quad \text{(hypothèse de domination sur le segment } S\text{)}$$

alors, l'application

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $X ouvert$.

■ **Exemple 2.2** Montrer que la fonction $F : x \mapsto]0,+\infty[\quad \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$

■

3 Dérivation sous le signe $\int_I$, formule de Leibniz

Proposition 3.1 — Dérivation sous le signe $\int_I$. Si f est une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

- Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur X ;
- Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in X,\ \forall t \in I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{(hypothèses de domination)}$$

alors l'application $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur X et

$$\forall x \in X,\ F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

■ **Exemple 3.1**

1. Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité sur **R** de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} cos(xt)dt$$

2. Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f et en déduire une valeur simple pour $f(x)$.
   On pourra admettre que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

■

3.1 Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de A

La dérivabilité et la continuité sont des propriété locales, donc montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle ouvert revient à montrer que celle-ci est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tous les segments de cet intervalle. D'où le théorème

Proposition 3.2 — Dérivation sous le signe $\int_I$, domination locale. Si f est une application de $A \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

— les fonctions f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $X \times I$ rapport au couple (x,t) ;

— pour tout segment S de X, il existe deux applications ϕ et ψ à valeurs réelles positives, continues par morceaux et *intégrables* sur I telles que

$$\forall x \in S,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \phi(t) \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$$

(hypothèses de domination sur tout segment)

alors l'application $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur X *ouvert* et

$$\forall x \in X,\ g'(x) = \frac{d}{dx}\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

■ **Exemple 3.2** — Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{arctant(xt)}{1+t^2} dt$ est continue sur $\mathbf{R}$, mais de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*$

— Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

Une récurrence sur k permet d'étendre ces théorèmes aux applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur X.

La fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall x > 0,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ ■