Corrigé Interrogation écrite N 4 MM231

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. sans calculer le polynôme caractéristique montrer que 3 est une valeur propre de A.

   .$A - 3I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1. Donc d'après le théorème du rang $dim Ker(A - 3I_2) = 3$ et donc $Ker(A - 3I) \neq \{0\}$. Ainsi 3 est une valeur propre puisque son sous-espace propre est non réduit à $\{0\}$.
2. Que peut-on dire de son ordre de multiplicité ?

   D'après le cours l'ordre de multiplicité d'une valeur propre est supérieur ou égal à la dimension de son sous-espace propre, donc $m(3) \geqslant 3$
3. Déterminer alors une deuxième valeur propre de A.

   Le polynôme caractéristique de A s'écrit donc $(3-X)^3(\lambda - X)$. λ étant l'unique valeur propre qui reste à déterminer. Ce polynôme est scindé, d'où d'après le cours la somme des valeurs propre est égale à la trace de la matrice soit :
   $$3 + 3 + 3 + \lambda = 16$$
   On en déduit que la deuxième valeur propre est 4
4. A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

   Le polynôme caractéristique est scindé et de degré 4 donc $m(3) = 3 = dim Ker(A - 3I)$.

   4 est une valeur propre simple donc $1 = m(4) = dim Ker(A - 4I_4)$.
   Donc toutes les conditions sont réunies pour affirmer la diagonalisation de la matrice A.
5. Donner une base du sous-espace propre associé à 3.
   Les vecteurs propres de 3 sont les solutions du système :
   $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Celui-ci est équivalent à $x + y + z + t = 0$
   Une base du sous-espace propre associé à 3 s'écrit donc $((1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1))$

.
.
.
.
.
.
.
.

Soit B la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer le polynôme caractéristique de B et montrer que 2 est l'unique valeur propre de B.

Soit $\chi_B(X)$ le polynme caractéristique de B, on a :

$$\chi_B(X) = det(B - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ -1 & -1 & 1-X \end{vmatrix}$$

En utilisant l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$, on obtient :
$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 2-X \\ 1 & 2-X & 1 \\ -1 & -1 & 1-X \end{vmatrix}$. Après factorisation par $2-X$ et l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$, on obtient $\chi_B(X) = (2-X)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ X-2 & -1 & 1-X \end{vmatrix}$ et enfin un développement par rapport à la première ligne permet d'écrire : $\chi_B(X) = (2-X)\begin{vmatrix} 0 & 2-X \\ X-2 & -1 \end{vmatrix}$. D'où

$$\chi_B(X) = (2-X)^3$$