Corrigé Interrogation écrite N 3 MM231

Exercice 1

1. $\vec{u}(x,y) \in Kerf \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+2y=0$ Donc $Ker(f)=vect((-2,1))$ et donc $dmKer(f)=1$, d'après la matrice de f on constate que $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ $f(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{i}$ donc $Im(f)=\vec{i}$
   Le théorème du rang donne $dim(\mathbb{R}^2)=dim(Ker(f))+dim(Im(f))$ puis
   $(x,y) \in Ker(f) \cap Im(f) \Leftrightarrow x+2y=0$ et $y=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$
   Donc $\mathbb{R}^2 = Ker(f) \oplus Im(f)$
2. Un calcul rapide montre que $A.A=A$ donc f est un projecteur.
3. On considère un vecteur non nul $e_1(-2,1) \in Ker(f)$ et un vecteur $e_2(1,0) \in Im(f)$ on obtient une nouvelle base $\mathcal{B}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ adaptée à $\mathbb{R}^2 = Ker(f) \oplus Im(f)$. On a $f(\vec{e}_1)=0$ et $f(\vec{e}_2)=e_2$ car f est un projecteur et que $\vec{e}_2 \in Im(f)$. Dans cette nouvelle base la matrice A' de f s'écrit $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   La matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ En résolvant le système $P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$..
   Vérification :
   $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$
4. On a $g = 2f - id$ donc $[g]_{\mathcal{B}_0 = 2[f]_{\mathcal{B}_0} - I_2 =} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$