Corrigé Interrogation écrite N 2

Exercice 1

1. Le terme général de la série garde un signe constant à partir d'un certain rang $cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} 1 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ et $sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ donc
   $u_n = \ln\left(cos\left(\frac{1}{n}\right) + sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc par équivalence $\sum u_n$ diverge.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $ch\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant 1$, donc u_n est positif, on peut donc appliquer le critère d'équivalence.
   $ch\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$. On en déduit que $u_n = \ln\left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par équivalence $\sum u_n$ converge.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. en utilisant le critère de D'Alembert, on a :
   $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{e^{2n}} = \frac{e^2}{(2n+2)(2n+1)}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$, donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 2

1. $u_n = \frac{\ln(n)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{\ln(n)}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - 1 - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right] \underset{+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n}\left[1 - \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right] \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}\ln(n)}{n^2} = 0$ par croissances comparées donc $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Ainsi $|u_n| \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$
   Or $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, c'est une série de Riemann (avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), donc par négligeabilité $\sum |u_n|$ converge. D'où la convergence de $\sum u_n$ car la convergence absolue entraine la convergence.
2. $\sum u_n$ est une série à termes positifs et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} = 0$ par croissances comparées donc
   $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ et comme ci-dessus on obtient la convergence de $\sum u_n$
3. Trois cas se présentent :
   — $\alpha > 0$ on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ et donc par comparaison avec une série de Riemann, on obtient la convergence de $\sum u_n$
   — $\alpha = 0$ on a $u_n = \frac{\ln(2)}{n}$ et donc $\sum u_n$ diverge c'est une série de Riemann.
   — $\alpha < 0$ dans cas $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\alpha\ln(n)}{n}$. Or $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est positive et croissante pour $t > 1$ et son intégrale $\int_1^n \frac{\ln(t)}{t} = \frac{1}{2}(\ln(n))^2$ diverge donc $\sum u_n$ diverge aussi.