Corrigé Interro 1

Exercice 1

1. $f : t \mapsto \frac{1}{t^4-1}$ est continue positive sur $[2,+\infty[$.
   Or $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$ et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^4}dt$ converge, car c'est une intégrale de Riemann, avec $\alpha = 4 > 1$. Donc par équivalence $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^4}dt$ converge.
2. $ft \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.
   En 0^+, $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}dt$ converge car c'est une intégrale de Riemann en 0^+ avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Donc par équivalence $\int_0^1 f(t)dt$ converge.
   En $+\infty$, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}t}dt$ converge car c'est une intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.
   Donc par équivalence $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge
   Conclusion : $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)d$ converge.
3. $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

   En 0^+, $f(t) = 1 + t + o(t)$ donc $e^t - 1 \underset{0^+}{\sim} t$ et par conséquent $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, donc comme ci-dessus $\int_0^1 f(t)dt$ converge.

   En $+\infty$, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{e^t}} = e^{-\frac{1}{2}t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}dt$ converge car c'est une intégrale de référence. Donc par équivalence $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.
   Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)d$ converge.

Exercice 2 La fonction $f : t \mapsto sin(t)e^{-2t}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$.Pour justifier son intégrabilité sur cet intervalle, on étudie sa convergence absolue sur cet intervalle.
$\forall t \in [0,+\infty[$, $|f(t)| \leqslant e^{-2t}$. Or $\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt$ converge, c'est une intégrale de référence. Donc par majoration $\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ converge, donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3 $f : t \mapsto \frac{arctan(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.
$arctan(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ donc $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^2}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge et par équivalence $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. Pour calculer cette intégrale on va faire une intégration par parties :

On pose $\begin{array}{r} '(t) = \frac{1}{t^2} \\ v(t) = arctan(t) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} (t) = \frac{-1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{array}$.
Donc :

Or $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{arctan(\lambda)}{\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 1$ donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \ln\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) = 0$.
Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{arctan(t)}{t^2}dt = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_1^{\lambda} \frac{arctan(t)}{t^2}dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$