

---

## devoir maison N6

---

Toujours avoir en tête que les devoirs à la maison sont formateurs, et permettent en particulier de travailler :

- la qualité de la rédaction, le soin et la présentation.
- la clarté et la précision des raisonnements.
- la recherche et la réflexion personnelles.

**Exercice 1** Résolution d'une E.D.L.

On considère, sur  $\mathbb{R}$ , l'équation différentielle (homogène) linéaire d'ordre 4, à coefficients constants :

$$(E) : y^{(4)} - 5y^{(3)} + 5y'' + 5y' - 6y = 0$$

Soit  $y, z \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On pose  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$  et  $Z = \begin{pmatrix} z \\ z' \\ z'' \\ z^{(3)} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$

1. Déterminer  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que :

$$y^{(4)} - 5y^{(3)} + 5y'' + 5y' - 6y = 0 \Leftrightarrow Y' = AY$$

2. (a) Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$ .
- (b) Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
- (c) Déterminer une matrice  $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  diagonale et une matrice  $P \in \mathcal{GL}_4(\mathbb{R})$  telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

3. Résoudre  $Z' = DZ$
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle  $(E)$

**Exercice 2**

1. Écrire un programme en Python permettant la représentation graphique sur  $[0; 20]$  de la solution  $F$  de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :  $(E) : xy'' + y' + xy = 0$  avec les conditions initiales  $F(0) = 1$  et  $F'(0) = 0$

2. On considère la fonction de Bessel  $B$  définie par  $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ .

Tracer le graphe de  $B$  sur  $[0, 20]$ , puis comparer avec le graphe de  $F$ . Émettre une conjecture.

3. Démontrer cette conjecture.