Corrigé DM 05 MM231

Exercice 1 : Déterminant de Vandermonde
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, on cherche à calculer :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Utiliser l'avant dernière colonne pour, à l'aide d'une combinaison linéaire, annuler le premier terme de la dernière colonne.

   On utilise l'opération élémentaire : $C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}$:

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

2. Réitérer le procédé pour obtenir un déterminant égal à $V_n(x_1,\dots,x_n)$ dont la première ligne est de la forme $1\ 0 \dots 0$.

   Les opérations élémentaires $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_1 C_{n-2}$,...,$C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$ donnent :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

3. Trouver, alors, une relation de récurrence liant $V_n(x_1,\dots,x_n)$ à $V_{n-1}(x_2,\dots,x_n)$.

   On développe par rapport à la première ligne et on factorise suivant les lignes :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \Pi_{i=2}^n (x_i - x_1) V_{n-1}(x_2,\dots,x_n)$$

4. Conclure.
   En réitèrant la relation obtenue précédemment :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \Pi_{i=2}^n (x_i - x_1) V_{n-1}(x_2,\dots,x_n) \Pi_{i=3}^n (x_i - x_2) \dots \Pi_{i=n}^n (x_i - x_{n-1}) V_1(x_n)$$

   Et $V_1(x_n) = 1$. D'où le résultat :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \Pi_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

Exercice 2 :
On note $\mathcal{B}$ ma base canonique de $\mathcal{C}_4[X]$.
On considère l'application f définie sur $\mathcal{C}_4[X]$ qui à tout polynôme $P \in \mathcal{C}_4[X]$ associe :

$$f(P) = \frac{X^2-1}{2} P'' - XP' + P$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{C}_4[X]$.
   Soient P et Q deux polynômes de $\mathcal{C}_4[X]$ et soit α un élément de $\mathbb{C}$. La linéarité de la dérivée première et de la dérivée seconde permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} f(\alpha P+Q) &= \frac{X^2-1}{2}(\alpha P+Q)''-X(\alpha P+Q)'+(\alpha P+Q) \\ &= \alpha\left(\frac{X^2-1}{2}P''-XP'+P\right)+\left(\frac{X^2-1}{2}Q''-XQ'+Q\right) \end{aligned}$$

   D'où la matrice Ainsi f est linéaire. De plus pour tout $P \in \mathcal{C}_4[X]$, on :$deg\left(\frac{X^2-1}{2}P''\right) \leqslant 4$ et $deg(XP') \leqslant 4$ donc f est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}_4[X]$

2. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
   Un calcul simple permet de montrer que :

$$\begin{array}{lll} f(1)=1 & f(X)=0 & f(X^2)=-1 \\ f(X^3)=-3X+X^3 & f(X^4)=-6X^2+3X^4 & \end{array}$$

   D'où la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$M=[f]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. (a) Déterminer les valeurs propres de f puis les espaces propres associés.
   M est une matrice triangulaire supérieure, les valeurs propres de f sont donc les éléments diagonaux : 0 e 1 sont des valeurs propres doubles et 3 est une valeur propre simple.
   Soit $P=a+bX+cX^2+dX^3+eX^4$:

Ainsi si :

— si $\lambda=0$ alors $d=e=0$, $a=c$ et b quelconque. Donc :

$$P \in E_0(f) \Leftrightarrow P(X)=a(1+X^2)+bX$$

Et, $E_0(f)=vect(1+X^2,X)$.

— si $\lambda=1$ alors $c=e=0$, $b=-3d$ et a quelconque. Donc :

$$P \in E_1(f) \Leftrightarrow P(X)=a(1+X^2)+bX$$

Et, $E_1(f)=vect(1,X^3-3X)$.

— si $\lambda=3$ alors $d=b=0$, $c=-2e$ et $a=e$. Donc :

$$P \in E_3(f) \Leftrightarrow P(X)=a(1-2X^2+X^4)$$

Et, $E_3(f)=vect(1-2X^2+X^4)$.

(b) f est-elle diagonalisable ?
$dimE_0(f)+dimE_1(f)+dimE_3(f)=5=dim\mathcal{C}_4[X]$, donc f est diagonalisable.

(c) Démontrer qu'il existe deux matrices A et B vérifiant :

$$M=A+B \quad A^2=A \quad B^2=3B \quad AB=BA=0$$

On fait un raisonnement par analyse et par synthèse. Ainsi en supposant qu'une telle décomposition existe alors nécessairement, on a : $M^2=A^2+AB+BA+B^2=A+3B$, d'où nécessairement le système :

$\left\{\begin{array}{l} M=A+B \\ M^2=A+3B \end{array}\right.$ donc une telle décomposition existe si nécessairement $B=\frac{1}{2}(M^2-M)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

et

$$A = M - B = \frac{1}{2}(3M - M^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il reste donc à vérifier que ces conditions sont suffisantes, c'est à dire vérifier que les matrices A et B ainsi trouvées vérifient bien :

$$A + B = M \quad AB = BA = 0 \quad A^2 = A \text{ et } B^2 = 3B$$

(d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe deux scalaires a_n et b_n, que l'on explicitera, tels que :

$$M^n = a_n A + b_n B$$

Du fait que $AB = 0$ et $BA = 0$ alors pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $A^i B^j = 0$ et $B^i A^j = 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = A^n + B^n$. Or $A^2 = A$ donc $A^n = A$ et $B^2 = 3B$ donc $B^n = 3^{n-1}B$. Ainsi : $M^n = A + 3^{n-1}B$. Soit $a_n = 1$ et $b_n = 3^{n-1}$