Devoir 05 MM231

Exercice 1 : Déterminant de Vandermonde
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, on cherche à calculer :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Utiliser l'avant dernière colonne pour, à l'aide d'une combinaison linéaire, annuler le premier terme de la dernière colonne.
2. Réitérer le procédé pour obtenir un déterminant égal à $V_n(x_1,\dots,x_n)$ dont la première ligne est de la forme $1\ 0 \dots 0$.
3. Trouver, alors, une relation de récurrence liant $V_n(x_1,\dots,x_n)$ à $V_{n-1}(x_2,\dots,x_n)$.
4. Conclure.

Exercice 2 :
On note $\mathcal{B}$ ma base canonique de $\mathcal{C}_4[X]$.
On considère l'application f définie sur $\mathcal{C}_4[X]$ qui à tout polynôme $P \in \mathcal{C}_4[X]$ associe :

$$f(P) = \frac{X^2-1}{2}P'' - XP' + P$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{C}_4[X]$.
2. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. (a) Déterminer les valeurs propres de f puis les espaces propres associés.
   (b) f est-elle diagonalisable ?
4. Démontrer qu'il existe deux matrices A et B vérifiant :

$$M = A + B \quad A^2 = A \quad B^2 = 3B \quad AB = BA = 0$$

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe deux scalaires a_n et b_n, que l'on explicitera, tels que :

$$M^n = a_n A + b_n B$$