Corrigé DM04 MM231

1 Questions préliminaires

1. (a) La trace d'une matrice carrée est la somme de ses termes diagonaux, donc $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

   (b) On suppose admis la propriété $tr(AB) = tr(BA)$.Si M et M' désignent deux matrices représentatives d'un endomorphisme u dans deux bases différentes, alors il existe une matrice P inversible telle que $M' = P^{-1}MP$. D'où $Tr(M') = Tr(P^{-1}MP) = Tr(MPP^{-1}) = Tr(M)$. Ainsi toutes les matrices représentant u ont la même trace. On dira que cette trace commune est celle de l'endomorphisme u.

   (c) La matrice de l'application identité est la matrice unité et ceci quelle que soit la base de travail donc $tr(Id_E) = n$.
   Si A et B désignent, respectivement, les matrices de deux endomorphisme u et v dans la même base, alors AB et BA sont les matrices des endomorphismes $u \circ v$ et $v \circ u$. Or $Tr(AB) = Tr(BA)$ donc $Tr(u \circ v) = Tr(v \circ u)$

2. Soit p un projecteur de E.

   (a) Si $y \in Im(p)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Donc $p(y) = p(p(x))$. Or p est un projecteur donc $p \circ p = p$. Ainsi,

   $$p(y) = p(x) = y$$

   (b) voir cours.

   (c) Soit $\mathcal{B}(e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition ci-dessus, c'est à dire $(e_1, ..., e_r)$ une base de $Im(p)$ et $(e_{r+1}, ..., e_n)$ une base de $Ker(p)$. D'après $2(a)$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant r$, $p(e_i) = e_i$. D'autre part, $\forall r + 1 \leqslant j \leqslant n$, $p(e_j) = 0$. D'où la matrice de p dans cette base :
   Et on vérifie bien que $tr(p) = r$.

2 Exercice 1

1. $(v \circ u) \circ (v \circ u) = v \circ (u \circ v) \circ u = v \circ Id_F \circ u = v \circ u$
2. $v \circ u$ étant un projecteur de E, donc en utilisant les résultats de la partie préliminaire.

   $$rg(v \circ u) = tr(v \circ u) = tr(u \circ v) = tr(Id_F) = dimF = r$$

3. $u \in \mathcal{L}(E, F)$ donc $u(E) \subset F$ et $v(u(E)) \subset v(F)$ et par conséquent $dim(v(u(E))) \leqslant dim(v(F)$, soit $rg(v \circ u) \leqslant rgv$.
   D'autre part $v \in \mathcal{L}(F, E)$ donc d'après le théorème du rang : $dimF = rgv + dim(Ker(v)$ et donc $rgv \leqslant dimF = r$. En reprenant le résultat de la question précédente, on peut donc écrire que :

$$r = rg(v \circ u) \leqslant rgv \leqslant r$$

D'où $rg(v \circ u) = r$.
De $v(u(E)) \subset v(F)$ et $dim(v(u(E))) = dim(v(F)) = r$ on peut écrire que : $Im(v \circ u) = Im(v)$.

4. $v(F) \subset E$ donc $u(v(F)) \subset u(E) \subset F$
   Or $u \circ v = Id_F$. Donc
   $F = Id_F(F) = u(v(F)) \subset u(E) \subset F$. En passant aux dimensions :
   $r \leqslant rgu \leqslant r$. ceci implique que $r = rg(u)$ et que $dim(Ker(u)) = n - r$ d'après le théorème du rang.
   De même, $v \circ u \in \mathcal{L}(E)$, donc d'après le théorème du rang : $dimE = rg(v \circ u) + dimKer(v \circ u)$. Soit $dimdimKer(v \circ u) = n - r$ d'après 3. D'autre part si $x \in Keru$ alors $u(x) = 0$ et $v(u(x)) = 0$ donc $x \in Ker(v \circ u)$. Ainsi $Keru \subset Ker(v \circ u)$. L'égalité des dimensions entraîne l'égalité entre les deux noyaux.
5. On $dimKer(u) + dimIm(v) = n - r + r = n = dimE$ et si $x \in Ker(u) \cap Im(v)$ alors $u(x) = 0$ et $\exists a \in F$ tel que $x = v(a)$. D'où $0 = u(x) = u(v(a)) = Id_F(a) = a$ et par la suite $x = v(0) = 0$
   D'où le résultat : $E = Ker(u) \oplus Im(v)$

3 Exercice 2

1. La linéarité de l'application Tr permet de vérifier rapidement que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Supposant que Φ soit non injective donc il existe un vecteur X non nul tel que $\Phi(X) = -X + Tr(X)A = 0$, on a nécessairement $Tr(X) \neq 0$ sinon X serait nul. En appliquant l'application Trace à cette égalité, on obtient : $Tr(X)(Tr(A) - 1) = 0$ et ainsi Tr(A)=1. réciproquement, supposant que $Tr(A) = 1$, on a dans ce cas $\Phi(A) = -A + A = 0$ donc $Ker(\Phi) \neq \{0\}$ et donc Φ est non injective.
3. On suppose que $Tr(A) \neq 1$

   (a) Dans ce cas, Φ est injective et donc s'il existe une solution, celle-ci est unique. En effet $\phi(X) = \Phi(X') = B$ implique que $X = X'$.

   (b) Pour résoudre cette équation on va procéder par analyse et par synthèse. Supposant qu'une solution X existe alors nécessairement, en appliquant l'appliquant trace $Tr(X)(1 - Tr(A)) = TrB$ et donc $Tr(X) = \frac{Tr(B)}{1-Tr(A)}$. Et, finalement X doit-être nécessairement égale à :

   $$X = \frac{Tr(B)}{1 - Tr(A)}A - B$$

   Il reste à vérifier que ce vecteur X est bien une solution. En effet :

   $$\Phi(X) = -\left(\frac{Tr(B)}{1 - Tr(A)}A - B\right) + \frac{Tr(B)}{1 - Tr(A)}A = B$$

4. On suppose que $Tr(A) = 1$:

(a) On a $Tr(\phi(X)) = -Tr(X) + Tr(X)Tr(A) = 0$. Donc tout élément appartenant à l'ensemble image de $-\Phi$ a une trace nulle.

(b) $-\Phi(-\Phi(X)) = -\Phi(X - Tr(X)A) = (X - Tr(X)A) - Tr(X - Tr(X)A)A = (X - Tr(X)A) - (Tr(X) - Tr(X)Tr(A))A = (X - Tr(X)A) = -\Phi(X)$ CQFD.
Conclusion : $-Phi$ est un projecteur donc c'est une projection sur $Im(-\Phi)$ parallèlement à $Ker(-\Phi)$

(c) si Y est une matrice de trace nulle alors $-\Phi(Y) = Y$ et donc $Y \in Im(-\Phi)$. Donc $T \subset Im(-\Phi)$. D'où d'après la question a) :

$$Im(-\Phi) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{telles que } Tr(X) = 0\}$$

(d) Si $X \in Ker(-\Phi)$ alors $X = tr(X)A$ et donc X est colinéaire à A. Réciproquement si $X = kA$, $k \in \mathbb{R}$, alors $-\Phi(X) = kA - tr(kA)A = kA - ktr(A)A = kA - kA = 0$ et donc $X \in Ker(-\Phi)$. Ainsi :

$$Ker(-\Phi) = vect(A)$$

(e) Résolution de l'équation $\Phi(X) = B$.
On remarque d'abord que $\Phi(X) = B$ équivaut à $-\Phi(-X) = B$. D'après la question précédente, si trace $Tr(B) \neq 0$ alors cette équation n'a pas de solution, car B n'est pas dans l'ensemble image de $-\Phi$.
Maintenant si $Tr(B) = 0$, alors $-B$ est une solution de $\Phi(X) = B$. Ainsi,
X solution $\Leftrightarrow \Phi(X) = B = \Phi(-B) \Leftrightarrow X + B \in Ker(\Phi) \Leftrightarrow X \in -B + Ker(\Phi)$