Devoir à la maison n°4

Toujours avoir en tête que les devoirs à la maison sont formateurs, et permettent en particulier de travailler :

- *la qualité de la rédaction, le soin et la présentation.*
- *la clarté et la précision des raisonnements.*
- ***la recherche et la réflexion personnelle.***

Questions préliminaires

Dans cette partie E,F désignent des $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $o \geq 1$ et $n \geq 1$.

1. On sait que pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$: $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
Expliquer pourquoi la définition qui consiste à appeler la trace d'un endomorphisme, la trace d'une matrice quelconque représentant cet endomorphisme a du sens ?
Justifier que $tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$, avec $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$.

2. Soit p un projecteur de E.
On suppose $\operatorname{rg}(p) = r$.
En vous plaçant dans une base adaptée à la décomposition pour le projecteur p démontrer que $tr(p) = rg(p)$.

Exercice n°1 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et r avec $n > r$.
On considère $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifiant

$$u \circ v = \operatorname{Id}_F$$

1. Démontrer que $v \circ u$ est un projecteur.

2. En utilisant les questions préliminaires, montrer que le rang de $v \circ u$ est égal à r (on remarquera et on justifiera que $dim(\operatorname{Im}(v)) \leq r$).

3. En déduire que $\operatorname{Im}(v \circ u)$ est égal à $\operatorname{Im}(v)$.

4. En utilisant le théorème du rang prouver alors que $\ker(v \circ u) = \ker(u)$.

5. Démontrer que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(v)$.

Exercice n°2 :

On fixe un entier $n \geq 1$, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non nulle et on considère l'application ϕ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \phi(X) = -X + \operatorname{tr}(X)A$$

1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2. Prouver que ϕ est non injectif si et seulement si $\operatorname{tr}(A) = 1$ (on pourra commencer par l'implication).

3. On suppose $\operatorname{tr}(A) \neq 1$.

- **a.** Combien l'équation $\phi(X) = B$ possède-t-elle de solutions ?
- **b.** Calculer la trace de ces solutions puis résoudre cette équation.

4. On suppose $\operatorname{tr}(A) = 1$.

- **a.** Calculer $\operatorname{tr}(\phi(X))$.
- **b.** Démontrer que $-\phi$ est une projection.
- **c.** Prouver que$\operatorname{Im}(-\phi) = T$ espace des matrices de trace nulle (on pourra raisonner par double inclusion).
- **d.** Prouver que $\ker(-\phi)$ est la droite vectorielle dirigée par A (on pourra raisonner par double inclusion).
- **e.** Résoudre l'équation $\phi(X) = B$.