Corrigé DM03 MM232

1 Exercice I

(a) En supposant qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f, solution de (E) alors la fonction f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-R, R[$ et vérifie :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 1 = 0$$

Soit par changement d'indices :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 1 = 0$$

ou encore :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 1 = 0$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, f est solution de (E) si nécessairement :

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1-a_0}{2} \\ a_{n+2} = \frac{1}{n+2}a_n \quad \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

(b) Toujours par analyse :

— en tenant compte du fait que, $a_0 = f(0) = 0$, on établit que $a_2 = \frac{-1}{2}$, $a_4 = \frac{-1}{4}a_2 = \frac{-1}{2\times 4}$ et une démonstration par récurrence simple montre que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = -\frac{-1}{2p}\frac{-1}{2p-2}...\frac{-1}{4}\frac{-1}{2} = \frac{(-1)^{p+1}}{2^p(p)!}$$

— De même en tenant compte du fait que, $a_1 = f'(0) = 0$, et de la relation de récurrence, $a_{n+2} = \frac{1}{n+2}a_n \quad \forall n \geqslant 1$, on établit que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0$

1. **Synthèse :**

On considère la série entière $\sum\limits_{p\geqslant 1} \frac{(-1)^{p+1}}{2^p(p)!}x^{2p}$

En posant $u_p(x) = \frac{(-1)^{p+1}}{2^p(p)!}x^{2p}$ on a :

$\left|\frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = \frac{|x|^2}{2(p+1)}$ dont la limite est 0 lorsque p tend vers $+\infty$. Ceci assure la convergence absolue de cette série quel que soit le réel x, d'après le critère de D'Alembert. Son rayon de convergence est donc $R = +\infty$.

Ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et les calculs ci-dessus montrent qu'elle est bien la solution du problème de Cauchy posé (E).

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^p$$
$$f(x) = 1 - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^p$$
$$f(x) = 1 - e^{\frac{-x^2}{2}}$$

2 Exercice II

1. En posant $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^n$ on a :
   $\left\|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right\| = \frac{n(2n+1)|x|^2}{(n+1)(2n+3)}$ dont la limite est $|x|$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc d'après le critère de D'Alembert :
   — Si $|x| < 1$, alors $\sum a_n x^n$ converge absolument.
   — Si $|x| > 1$, alors $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.
   On peut donc conclure que le rayon de convergence de la série est $R = 1$.
2. En constatant que $\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$$

— D'après le cours on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \ln(1+x)$.

— Pour calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$, on va distinguer trois cas :
  — $x = 0$, la somme est nulle.
  — $x > 0$, on fait le changement $x = t^2$

  ici le cours permet la permutation de $\sum$ et $\int$
  — $x < 0$, on fait le changement $x = -t^2$