Séries entières

Exercice 1
On considère sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :

$$(PC) : \begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

On admet que le problème (PC) admet une unique solution.

1. **Analyse** : on suppose qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, de somme $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, solution de l'équation différentielle.
   (a) Déterminer une relation de récurrence liant les coefficients a_n où $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Calculer explicitement a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. **Synthèse** : on considère la série $\sum a_n x^n$ ci-dessus. Déterminer son rayon de convergence et justifier qu'elle est solution de (PC).
3. Exprimer la somme f(x) de la série entière $\sum a_n x^n$ à l'aide des fonctions usuelles et déterminer explicitement la solution de (PC).

Exercice 2 : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$

1. Déterminer le rayon R de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$
2. Déterminer pour tout $x \in]-R; R[$ l'expression explicite de la somme de la série à l'aide des fonctions usuelles.