Corrigé DM02 MM232

1 Exercice I

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout entier $k \geqslant 1$, on a pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. D'où par intégration entre k et $k+1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k}$$

En utilisant l'inégalité de droite :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

D'où d'après la relation de Chasles :

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leqslant H_n$$

De même l'inégalité de gauche permet d'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$$

Soit, $H_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln(n)$ ou encore $H_n \leqslant 1 + \ln(n)$ D'où l'encadrement :

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

En divisant les trois membres par $\ln(n)$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on montre par encadrement que :
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$. Ceci justifie que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

2. $$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) = -\ln(n)$$

et $1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On retrouve donc le résultat demandé :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$$

3. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
   (a) $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

(b) La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par équivalence $\sum u_n$ converge. Ainsi : $\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$ est un réel bien défini.

(c) La série à termes positifs

4. (a) On fait une démarche similaire à celle utilisée dans la première question, en considérant la fonction continue et strictement décroissante $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. Ainsi, pour n un entier $\geqslant 2$ fixé, on peut écrire pour tout entier $k \geqslant n+1$, que :

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leqslant \frac{1}{k^2}$$

Si N est un entier $\geqslant n+1$, on a d'après l'inégalité de droite :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

Soit d'après la relation de Chasles :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N} = \int_{n+1}^{N} \frac{1}{t^2} dt \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

En sommant l'inégalité de gauche :

$$\sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=n}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt$$

Soit par changement d'indices et par Chasles :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{N} + \frac{1}{n}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans les deux dernières inégalités on obtient :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

En divisant par $\frac{1}{n}$ et faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'équivalence :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n}$$

(b) On a $H_n - \ln(n) - \gamma = -r_n = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$. Or lorsque $n \to +\infty$, k tend aussi vers $+\infty$ et pour chaque terme de ce reste on peut écrire :
$\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}$.
En admettant la somme des équivalents des termes du reste d'une série convergente, on obtient :

$H_n - \ln(n) - \gamma = -r_n \underset{+\infty}{=\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n}$ d'après la question précédente. D'où le résultat :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

5. Applications :

(a) Par décomposition en éléments simples on montre que :
$\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{2}{2n-1}$, donc :
$\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = -\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + 2\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} = -\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} + 2\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} + \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{2n}\right)$ D'où :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = -2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + 2\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} = 2(H_{2n} - H_n) = 2\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}$$

Le développement limité de H_n ci-dessus permet d'écrire :

$$H_{2n} - H_n \underset{+\infty}{=} ln(2n) - ln(n) + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} ln(2) - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\ln(2)$

(b) Par un raisonnement analogue, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= H_{2n} - H_n \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$