Devoir à la maison n°2

Problème : Autour de la constante d'Euler

On pose pour $n \in \mathbf{N}^*$: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Démontrer que : $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. Prouver que pour $n \geqslant 2$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$

3. On pose pour $n \geqslant 2$: $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

a. Déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$.

b. Prouver la convergence de la série $\sum u_n$

On pose : $\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

c. Établir que pour $n \geqslant 2$: $H_n = \ln n + \gamma - r_n$
où r_n représente le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.

4. **a.** A l'aide d'une comparaison avec une intégrale déterminer, un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ en $+\infty$.

b. En admettant que deux S.à.T.P. qui ont des termes généraux équivalents ont des restes qui sont aussi équivalents, en déduire que :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

5. Applications :

a. On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n-1)}$.

Montrer, par décomposition en éléments simples que :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = 2 \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} = H_{2n} - H_n$$

En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$.

b. Calculer la somme de la série de terme général $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$. (On pourra faire un raisonnement analogue à celui de l'exemple précédent, en pensant aux termes pairs et impairs.)