Corrigé DM01 MM232

1 Exercice I

1. On a $e^t \underset{0}{=} 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$, on en déduit que : $e^{-at}-e^{-bt} \underset{0}{=} (b-a)t+\frac{(a-b)(a+b)}{2}t^2+o(t^2)$
2. la fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
   Le développement limité établi ci-dessus montre que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} = b-a$. Donc f est prolongeable par continuité et l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ est faussement impropre.
   $a < b$ donc pour tout $t > 0$, $e^{-at} > e^{-bt}$ et donc f est positive sur $]0,+\infty[$. De plus par croissances comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{t\to+\infty}(te^{-at}-te^{-bt}) = 0$. Donc $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann). Donc par négligeabilité $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. On en conclut finalement la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.
3. En faisant le changement de variable $u = at$, de classe$\mathcal{C}^1$ et strictement croissant, On :
   $$\int_x^y \frac{e^{-at}}{t}dt = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{\frac{u}{a}}\frac{du}{a} = \int_{ax}^{ay}\frac{e^{-u}}{u}du = \int_{ax}^{ay}\frac{e^{-t}}{t}dt$$
   En faisant, de même, le changement de variable $v = bt$, on montre que : $\int_x^y \frac{e^{-bt}}{t}dt = \int_{bx}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt$. Ainsi,
   $$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_x^y \frac{e^{-at}}{t}dt - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t}dt = \int_{ax}^{ay}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{bx}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt$$
   En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire :
   $\int_{ax}^{ay}\frac{e^{-t}}{t}dt = \int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}dt + \int_{bx}^{ay}\frac{e^{-t}}{t}dt$ et en remplaçant dans l'inégalité ci-dessus :
   $$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}dt+\int_{bx}^{ay}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_{bx}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt = \int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}dt+\int_{bx}^{ay}\frac{e^{-t}}{t}dt+\int_{by}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}dt$$
   Et la relation de Chasles, de nouveau, permet de conclure que :
   $$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt$$
4. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, donc pour tout $z > 0$ et pour tout $t \in [az, bz]$, on a : $e^{-bz} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-az}$. D'où les inégalités : $\int_{az}^{bz}\frac{e^{-bz}}{t}dt \leqslant \int_{az}^{bz}\frac{e^{-t}}{t}dt \leqslant \int_{az}^{bz}\frac{e^{-az}}{t}dt$, puis l'égalité $\int_{az}^{bz}\frac{dt}{t} = [ln(t)]_{az}^{bz} = ln\left(\frac{b}{a}\right)$ permet d'obtenir l'encadrement demandé :
   $$e^{-bz}ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \int_{az}^{bz}\frac{e^{-t}}{t}dt \leqslant e^{-az}ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

5. On sait que : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt$
$\underset{\substack{y\to+\infty \\ x\to 0}}{=} \int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt = \underset{\substack{y\to+\infty \\ x\to 0}}{=} \left[\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt\right]$. Or
$e^{-by} ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt \leqslant e^{-ay} ln\left(\frac{b}{a}\right)$ et $\lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 0$.
D'où par encadrement :
$\lim_{y\to+\infty} \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0$.
De même : $e^{-bx} ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt \leqslant e^{-ax} ln\left(\frac{b}{a}\right)$ et $\lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$. D'où par encadrement : $\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt = ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

$\underset{\substack{y\to+\infty \\ x\to 0}}{=} \int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt = \left(\frac{b}{a}\right)$

2 Exercice II

1. la fonction $t \mapsto \ln(sin(t))$ est continue et de signe constant sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Au voisinage de 0 $sint = t + o(t)$ donc $\ln(sin(t)) \underset{0}{=} ln(t)$. Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t) dt$ est une intégrale de référence qui converge. D'où par équivalence la convergence de l'intégrale I.
2. Le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, justifié car de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant, permet d'écrire :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(sin(\frac{\pi}{2} - u)) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(cos(u))(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(cos(u)) du = J$$

3. (a) On a $\int_0^{\pi} \ln(sin(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin(t)) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(sin(t)) dt$, puis dans la deuxième intégrale on utilise le changement de variable $u = \pi - t$, on obtient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(sin(t)) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(sin(\pi - u))(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin(u)) du$$

   D'où le résultat $\int_0^{\pi} \ln(sin(t)) dt = 2I$
   (b) On pose le changement de variable $u = 2t$ donc :

$$K = \int_0^{\pi} \ln(sin(u)) \frac{du}{2} = \frac{2I}{2} = I$$

4. La formule $sin(2t) = 2sin(t)cos(t)$ permet d'écrire :

$$K = \int_0 \frac{\pi}{2} \ln(sin(t)) dt + \int_0 \frac{\pi}{2} \ln(cos(t)) dt + \int_0 \frac{\pi}{2} \ln(2) dt$$

   En tenant compte des égalités $I = K = J$ on déduit que :

   $I = -\int_0 \frac{\pi}{2} \ln(2) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$