Devoir à la maison n°1

Toujours avoir en tête que les devoirs à la maison sont formateurs, et permettent en particulier de travailler :

- *la qualité de la rédaction, le soin et la présentation.*
- *la clarté et la précision des raisonnements.*
- ***la recherche et la réflexion personnelle**.*

Exercice n°1 :

Soient $0 < a < b$

1. Donner un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $t \mapsto \mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}$

2. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t$

3. Soient $0 < x < y$. Démontrer que, $\displaystyle\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t} \mathrm{d}t = \int_{ax}^{ay} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t$, puis en déduire que :

$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t$$

4. Démontrer que, pour tout réel $z > 0$: $\displaystyle\mathrm{e}^{-bz} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-az} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

5. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Exercice n°2 :

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}$

$ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que l' intégrale impropre I converge.

2. Démontrer que I = J.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = 2I$, puis que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t$

4. calculer I + J en fonction de I et en déduire I et J.