Ce sujet est destiné uniquement aux élèves de la classe B (M. Abdelqari). Les deux derniers exercices sont à rédiger sur une copie séparée.
L'usage de la calculatrice est interdit.

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation.

Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

1. Justifier que f est continue sur $(\mathbf{R}^2)^*)$
2. Justifier que f est continue en $(0,0)$.
3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$
4. Calculer les réels $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
5. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice n°2 :

Soit G la fonction qui, à tout réel $x \geqslant 0$, associe :

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \,\mathrm{d}t$$

On pose pour tout $t > 0$ et tout $x \geqslant 0$:

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^x$$

1. **a.** Pour $x = 0$ et pour $x > 0$ déterminer :

$$\lim_{t \to 0} \mathrm{e}^{-t} t^x$$

Que peut-on en déduire pour $t \longmapsto f(x,t)$?

b. Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, l'intégrale $G(x)$ est convergente.

2. Que vaut $G(0)$?
3. Soit A un réel strictement positif.

a. i. Démontrer que, pour tout réel $t \in]0;1]$, et tout réel x de $[0,A]$:

$$\left|\mathrm{e}^{-t} t^x\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

ii. Démontrer que, pour tout réel $t \geqslant 1$, et tout réel x de $[0,A]$:

$$\left|\mathrm{e}^{-t} t^x\right| \leqslant t^A \mathrm{e}^{-t}$$

iii. Démontrer que, pour tout réel strictement positif t, et tout réel x de $[0,A]$:

$$\left|\mathrm{e}^{-t} t^x\right| \leqslant (1+t^A)\mathrm{e}^{-t}$$

b. Démontrer que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} |\ln t|(1+t^A)\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

c. Démontrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$.

d. En déduire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^+$.

4. On admettra que l'on peut prouver par récurrence que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, exprimer alors pour entier naturel n et tout réel positif x, **sous la forme d'une intégrale**, $G^{(n)}(x)$.

Exercice n°3 : Les parties A et B sont indépendantes :

Partie A

1. Soit $\phi : (x,y) \mapsto (u = x+y, v = x-y)$, justifier que ϕ est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$.
2. Calculer la matrice Jacobienne de ϕ en (x,y)
3. En déduire, en posant $f = g \circ \phi$, que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{\partial g}{\partial v}$
4. Déterminer, alors, les fonctions $(x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et solutions de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$$

Partie B Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle :

$$(x+1)y" - (2x-1)y' + (x-2)y = 0$$

1. Vérifier que $y_1(x) = e^x$ est une solution de $(\mathcal{E})$sur $\mathbf{R}^+$.
2. On cherche à déterminer la solution générale de $(\mathcal{E})$ par la méthode de Lagrange. Pour cela on pose $y(x) = z(x)e^x$. Montrer que z vérifie l'équation différentielle :

$$(\mathcal{H}) \quad (x+1)z" + 3z' = 0$$

3. Résoudre $(\mathcal{H})$ puis en déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbf{R}^+$

Exercice n°4 :

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique. On note p la probabilité d'obtenir pile et on suppose seulement $p \in]0,1[$.
Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile. On note N le nombre de lancers nécessaires.
Dans un deuxième temps, il lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1. Préciser la loi de N, et la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.
2. En déduire la loi du couple (N,X). On pourra utiliser la formule $P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$
3. On admet que :

$$\forall x \in]-1;1[, \ \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n$$

   Prouver que la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \ P(X=k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \quad \text{et} \quad P(X=0) = \frac{(1-p)}{(2-p)}$$

4. Soient $\lambda \in]0,1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ, indépendante de U. On note $Y = UV$.
   a. Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de Y.
   b. Pour $k \in N$, calculer $P(Y = k)$ (on pourra traiter séparément le cas $k = 0$).
   c. Calculer la variance de Y.
5. En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.