Mathématiques, examen module MM 241

Durée : *4 heures.*

Barème indicatif :
exercice n°1 : 7 points ; exercice n°2 : 3 points ; exercice n°3 : 5 points ; exercice n°4 : 5 points.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des calculs entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les calculatrices sont autorisées.

Consignes pour les copies :
rendre séparément d'une part ***les exercices n°1 et n°2,***
et d'autre part ***les exercices n°3 et n°4****.*

Exercice n°1 :

Le plan euclidien étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe Γ dont les équations paramétriques sont :

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

1. Étude et tracé de Γ.

- **a.** Prouver que Γ possède un axe de symétrie que l'on précisera. On étudiera Γ sur $\mathbf{R}_+$.
- **b.** Dresser le tableau complet des variations de x et y.
- **c.** Faire l'étude de la branche infinie de Γ sur $\mathbf{R}_+$ (y compris les positions relatives).
- **d.** Calculer les coordonnées des points où la tangente à Γ est verticale ou horizontale.
- **e.** Prouver que Γ possède un point double (c.à.d. qu'il existe t et t' réels distincts tels que $\Gamma(t) = \Gamma(t')$) que l'on précisera.
- **f.** Tracer le support de Γ.

2. Former une équation cartésienne de Γ.

Exercice n°2 :

L'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la courbe paramétrée de l'espace Γ de paramétrage :

$$\begin{cases} x(t) & = t \\ y(t) & = t^2 \\ z(t) & = 0 \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de l'intersection de la courbe avec le plan d'équation $z = 0$?

2. Justifier l'existence de la tangente à Γ au point de paramètre $t = 2$, puis en donner un vecteur directeur.

3. Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution S obtenue en faisant tourner Γ autour de l'axe $(O, \vec{j})$.

Exercice n°3 :

L'espace euclidien étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface S d'équation :

$$9x^2 + 3y^2 + 3z^2 - \frac{8}{27} = 0$$

1. **a.** Déterminer les points réguliers de S.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en un point régulier $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$.

c. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ un point où la normale au plan tangent à S en ce point rencontre les trois plans d'équations : $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.
On notera respectivement P, Q et R ces trois points d'intersection.
Pourquoi $\overrightarrow{M_0P}$, $\overrightarrow{M_0Q}$ et $\overrightarrow{M_0R}$ sont colinéaires ?

2. **a.** Déterminer la nature de la courbe E intersection de S et du plan d'équation $z = 0$.

b. On désigne par C un cône de sommet $T(1,1,1)$ et de directrice E.
Rappeler une condition nécessaire et suffisante, exprimée vectoriellement, pour qu'un point M appartienne à C.

c. Prouver que $M(x,y,z) \in C$ équivaut à :

$$\frac{243}{8}(x-z)^2 + \frac{81}{8}(y-z) = (1-z)^2$$

Exercice n°4 :

Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface Σ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = t\cos\theta \\ z = a\sin\theta \end{cases}, \ (t, \theta) \in \mathbf{R}^2.$$

et la surface S d'équation cartésienne

$$F(x,y,z) = a^2(x^2 - y^2) - x^2z^2 = 0$$

où a est un réel strictement positif.

1. Soit $M(t,\theta)$ un point quelconque de Σ, montrer qu'il appartient à S
2. Y-t-il égalité de Σ et de S. On pourra considérer les points $A(0,0,\alpha)$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$.
3. Déterminer les points singuliers de Σ.
4. Déterminer une équation du plan tangent $\mathcal{T}$ au point $M_0\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ de Σ.
5. Discuter, en fonction de z_0, la nature des courbes intersections de Σ et des plans d'équations $z = z_0$; z_0 étant un réel quelconque.