Mathématiques, corrigé de l'examen du module MM 232

Exercice n°1 :

1. $\forall x \in \mathbf{R}$, $-x \in \mathbf{R}$ et $g(-x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^{-x} e^{t2} dt$. En faisant le changement de variable $u = -t$ (licite car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$), on obtient :

$$g(-x) = e^{-x^2} \int_0^{x} e^{u^2}(-du) = -g(x)$$

2. **a.** L'équation homogène est $(\mathcal{H})$: $\quad y' + 2y = 0$ dont les solutions sont les fonctions h définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$h : x \mapsto \lambda e^{\int -2x dx} = \lambda e^{-x^2}$$

Ici, λ est une constante réelle quelconque.

b. la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$ donc la fonction $u : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t2}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $u'(x) = e^{x^2}$. Ainsi la fonction g, par produit, est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad g'(x) = -2xe^{x^2} \int_0^x e^{t2} + e^{-x^2} e^{x^2} = -2xe^{x^2} \int_0^x e^{t2} + 1$$

En remplaçant y par g et y' par g' dans l'équation (E), on vérifie bien que :

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad g'(x) + 2xg(x) = 1$$

g est bien solution de (E).

c. Toute solution de l'équation complète (E) est la somme d'une solution générale de $(\mathcal{H})$ c'est à dire de la forme de h et d'une solution particulière de (E) par exemple g. Ainsi les solution de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$x \mapsto \lambda e^{-x^2} + e^{-x^2} \int_0^x e^{t2}$$

3. **Analyse :**

a. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme y.
La fonction y étant la somme d'une série entière définie sur $]-R,R[$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc si y est solution de (E) alors nécessairement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 1 = 0$$

Soit par changement d'indices :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1} x^n - 1 = 0$$

ou encore : $a_1 - 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1}] x^n = 0$.
Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, y est solution de (E) si nécessairement :

$$a_1 - 1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0$$

Une condition nécessaire qui s'écrit encore, par changement d'indice :

$$a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \quad (n+2)a_{n+2} + 2a_n = 0 \quad (\mathcal{R})$$

b. D'après la relation de récurrence $(\mathcal{R})$: on obtient :
$a_3 = \dfrac{-2}{3}a_1 = \dfrac{-2}{3}$, $a_5 = \dfrac{-2}{5}a_3 = \dfrac{-2}{5}\dfrac{-2}{3}$ et une démonstration par récurrence simple montre que :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad a_{2p+1} = \frac{-2}{2p+1}\frac{-2}{2p-1}\cdots\frac{-2}{5}\frac{-2}{3} = \frac{(-1)^p 2^{2p}}{(2p+1)!}$$

c. On refait le même raisonnement pour les coefficient d'indice pairs, on obtient :

$$\forall p \in \mathbf{N} \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!}a_0$$

Alors que les coefficient a_{2p+1} sont bien définis, ceux d'indices pairs dépendent uniquement de la constante a_0

4. Synthèse :
Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés. Une telle série entière peut s'écrire, $\sum\limits_{p\geq 0} a_{2p}x^{2p} + \sum\limits_{p\geq 0} a_{2p+1}x^{2p+1}$.
En posant $u_p(x) = a_{2p}x^{2p}$ et $v_p(x) = a_{2p+1}x^{2p+1}$, on a :

$$\left\|\frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right\| = \frac{|x|^2}{p+1} \text{ et } \left\|\frac{v_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right\| = \frac{2^2(p+1)}{(2p+3)(2p+1)}|x|^2.$$

Ces deux rapport ont pour limite 0 lorsque p tend vers $+\infty$. Ceci assure la convergence absolue des deux séries quel que soit le réel x, d'après le critère de D'Alembert. Leur rayon de convergence est $R' = +\infty$. y étant la somme des deux séries, donc d'après le cours, son rayon de convergence est $R \geq R'$. Soit $R = +\infty$. De plus par les calculs ci-dessus y est aussi solution de l'équation différentielle (E).

5. On a g(0)=0 et g est solution de (E), donc g est l'unique fonction vérifiant le problème de Cauchy $y(0) = 0$ et $y' + 2xy = 1$.
D'autre part la série entière y qu'on vient de calculer est aussi solution de (E). En lui imposant la condition $y(0) = 0$ c'est à dire $a_0 = 0$, on aura $g = y$ par unicité du problème de Cauchy. Les coefficients d'indices pairs sont donc nuls et un développement en série entière de g s'écrit :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Exercice n°2 :

1.
- φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ comme composée et produit de fonctions dérivables.
  Pour $x > 0$:
  $$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{-2}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \frac{-1}{x^2} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ &= \left(-\frac{2x+1}{x^4}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$
  Le signe est évident pour $x > 0$, on a : $\varphi'(x) > 0$ pour $x > 0$.
  On en déduit que φ est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
- $\lim\limits_{0} \varphi = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$ (pas de forme indéterminée ici).
  $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$ (encore une fois pas de forme indéterminée).
-

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

2. La fonction φ est continue (car dérivable) et décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, donc pour tout $t \in \left[\dfrac{k}{n}; \dfrac{k+1}{n}\right]$:

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(t) \mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

3. D'après ci-dessus on a :

$$\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

Et aussi en changeant k en $k-1$:

$$\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \varphi(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

D'où en conservant les inégalités de droite pour la première ligne, et de gauche pour la seconde :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \varphi(t) \mathrm{d}t$$

4. D'après ci-dessus :

$$\sum_{k=n}^{N} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(t) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \varphi(t) \mathrm{d}t$$

Avec la relation de Chasles on obtient :

$$\int_{1}^{\frac{N+1}{n}} \varphi(t) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{N}{n}} \varphi(t) \mathrm{d}t$$

5. a. Vérifions la convergence lorsque $N \to +\infty$ des intégrales de la question précédente :

- φ est continue et positive sur $\mathbf{R}_+^*$;
- $\dfrac{\varphi(t)}{\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}} = t^{\frac{3}{2}}\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \circ\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$;
- $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t$ converge car intégrale de Riemann avec $\dfrac{3}{2} > 1$.

D'après le théorème sur les intégrales et la négligeabilité, on en déduit que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \varphi(t) \mathrm{d}t$ converge.

Il en est de même pour $\displaystyle\int_{\frac{n-1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \mathrm{d}t$

b. On remarque de plus que la suite (attention, l'indice est N !) $\displaystyle\left(\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{N\in\mathbf{N}}$

- est croissante car pour tout $k \in [\![n,N]\!]$ on a $\dfrac{1}{n}\varphi\left(\dfrac{k}{n}\right) \geqslant 0$;
- est majorée par $\displaystyle\int_{\frac{n-1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \mathrm{d}t$ (qui majore la suite des intégrales $\displaystyle\left(\int_{\frac{n-1}{n}}^{N} \varphi(t) \mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbf{N}}$, suite croissante et convergente donc majorée par sa limite) ;
- donc qu'elle converge.

Sa limite lorsque $N \to +\infty$ a donc un sens.

c. Conclusion avec le théorème d'inégalité et passage à la limite pour les suites :

$$\int_{1}^{+\infty} \varphi(t) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{n-1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \mathrm{d}t$$

6. Une primitive de φ sur $\mathbf{R}_+^*$ est $t \longmapsto -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ (on a reconnu $-u'\mathrm{e}^{u}$).

Donc avec la question précédente (tout a un sens la convergence étant prouvée) :

$$\left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_{1}^{+\infty} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_{\frac{n-1}{n}}^{+\infty}$$

On calcule :

$$\mathrm{e} - 1 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}} - 1$$

Par passage à la limite en n et avec le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\mathrm{e}-1$$

Or :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{n^2}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}$$
$$=n\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}$$

Donc on obtient le résultat souhaité :

$$\lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}=\mathrm{e}-1$$

Exercice n°3 :

Partie A :

1.
- $u_0=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}t=\pi$
- $u_1=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t$

  $u_1=[\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2$
- $u_2=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$ or $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ donc :

  $$u_2=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\cos(2t)\,\mathrm{d}t$$
  $$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

2. Soit $n\in\mathbf{N}^*$, on effectue une IPP en posant $\begin{cases}u(t)=\sin t\\u'(t)=\cos t\end{cases}$ et $\begin{cases}v(t)=\cos^n t\\v'(t)=-n\sin t\cos^{n-1}t\end{cases}$

qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

$$u_{n+1}=[\sin t\cos^n t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-n\sin^2 t\cos^{n-1}t\,\mathrm{d}t$$
$$=0+n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\cos^{n-1}t\,\mathrm{d}t$$
$$=n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}t\,\mathrm{d}t-n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}t\,\mathrm{d}t$$

On a obtenu :

$$u_{n+1}=nu_{n-1}-nu_{n+1}\iff(n+1)u_{n+1}=nu_{n-1}$$

3. Pour $n\geqslant 2$:

$(n+1)u_{n+1}u_n=nu_{n-1}u_n$ d'après la question précédente

$=nu_nu_{n-1}$ on réutilise la question précédente en modifiant n en $n-1$: $nu_n=(n-1)u_{n-2}$

$=(n-1)u_{n-1}u_{n-2}$ donc de proche en proche :

$=\quad\vdots$

$=2u_2u_1$

$=1u_1u_0$

$=2\pi$

4. Comme sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ la fonction cos est à valeurs dans $[0;1]$ alors pour tout entier naturel n :

$$0\leqslant\cos^{n+1}\leqslant\cos^n\text{ sur }\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

Par croissance de l'intégrale il vient :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

5. D'après la question 3. pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$(n+1)u_{n+1}u_n = 2\pi$$

Et par décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$u_{n+1} \leqslant u_n$$

D'où :

$$(n+1)u_{n+1}u_n = 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2$$

De même :

$$nu_nu_{n-1} = 2\pi$$
$$u_n \leqslant u_{n-1}$$

Nous donne :

$$nu_n^2 \leqslant (n+1)u_nu_{n-1} = 2\pi$$

6. Soit n entier naturel.

On sait déjà (question 4.) que $u_n \geqslant 0$.

Or comme de plus $\big((n+1)u_{n+1}u_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et non nulle alors u_n ne peut pas s'annuler.

7. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$ alors d'après 5. :

$$nu_n^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2 \iff \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

En conséquence directe du théorème des gendarmes :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

Partie B : Expression de la série entière réelle $\sum u_nx^n$

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ donc le rayon de convergence de $\sum u_nx^n$ est le même que celui de $\sum \sqrt{\frac{2\pi}{n}}x^n$.

On peut alors utiliser le critère de D'Alembert pour les séries entières car $\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ ne s'annule pas pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc le rayon de convergence vaut 1.

2. Soit $x \in]-R;R[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_kx^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k t\,\mathrm{d}t\right)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^k\cos^k t\,\mathrm{d}t\right)$$

(On admet l'interversion entre intégrale et somme, celle-ci ne relevant pas du théorème d'intégration des séries (l'intégration étant en t et pas en x), mais d'une convergence dominée...)

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\cos^k t\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (x\cos t)^k\right)\mathrm{d}t \quad \text{avec } |x\cos t| < 1 \text{ on reconnait une série géométrique,}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t}$$