Mathématiques, partiel module MM 232

Durée : *4 heures.*

Barème indicatif : *ex. n°1 : 12 pts ; ex. n°2 : 12 pts ; ex. n°3 : 12 pts ; QCM : 4 pt.*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des calculs entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Consignes pour les copies :
rendre séparément d'une part le QCM et l'exercice n°1 et d'autre part les exercices n°2 et n°3.

Exercice n°1 :

On considère sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 2xy = 1$$

On pose la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$$

1. Démontrer que g est impaire.

2. **a.** Résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E).

b. Prouver que g est solution de (E).
(On rappelle que : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t\right) = \varphi(x)$.*)*

c. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

3. On cherche dans cette question les séries entières solutions possibles de (E), de rayon de convergence $R = +\infty$ sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

a. Prouver que si y solution de (E) la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n+2)a_{n+2} + 2a_n = 0$$

(On n'exige pas une récurrence rédigée pour la réponse.)

b. Déterminer a_1 et donner les coefficients a_{2p+1} pour tout $p \in \mathbf{N}$.

c. Déterminer les coefficients a_{2p} pour tout $p \in \mathbf{N}$ en fonction de a_0.
Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est entièrement déterminée par a_0.

4. Réciproquement si l'on considère une série entière, vérifiant les conditions déterminées ci-dessus, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n+2)a_{n+2} + 2a_n = 0$$

Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

(Plusieurs méthodes possibles.
Si vous n'en avez pas regarder par exemple les rayons de convergence de : $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} a_{2p} y^p$ *et* $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} a_{2p+1} y^p$.*)*

5. Expliciter le développement en série entière de g.

Exercice n°2 :

On cherche à déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right)$$

On pose φ la fonction définie $\mathbf{R}_+^*$ par $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

1. Étudier les variations de φ et dresser son tableau de variations complet.
2. Pour k et n entiers, avec $k\geqslant n>0$, déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ entre deux valeurs de φ divisées par n.
   (Justifier, bien sûr, succinctement la réponse. Un dessin pourra aider au raisonnement.)
3. En déduire, pour k et n entiers, avec $k\geqslant n>0$, un encadrement de $\dfrac{1}{n}\varphi\left(\dfrac{k}{n}\right)$ entre deux intégrales.
4. En déduire, pour N et n entiers, avec $N>n>0$, un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ entre deux intégrales.
5. Déterminer pour n entier, avec $n>0$, un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ entre deux intégrales impropres. Vous veillerez à justifier la convergence des intégrales.
6. Déterminer une primitive de φ sur $\mathbf{R}_+^*$, puis prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right)=\mathrm{e}-1$

Exercice n°3 :

On pose pour tout $n\in\mathbf{N}$:

$$u_n=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,\mathrm{d}t$$

Partie A : Étude de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(On peut répondre à toutes question de cette partie sans avoir traité les questions précédentes, en admettant les résultats obtenus.)

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Établir avec une IPP que : $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ (n+1)u_{n+1}=nu_{n-1}$
3. Prouver que la suite $\big((n+1)u_{n+1}u_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et préciser sa valeur.
   (On n'exige pas une récurrence rédigée pour la réponse.)
4. Comparer, pour n entier naturel et $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos^{n+1}t$ et $\cos^n t$ et déterminer les variations de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
5. Établir que :
   $$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ nu_n^2\leqslant 2\pi\leqslant(n+1)u_n^2$$
6. Justifier que pour n entier naturel $u_n>0$.
7. En déduire finalement un équivalent de u_n en $+\infty$.

Partie B : Expression de la série entière réelle $\sum u_nx^n$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_nx^n$.
2. Établir que :
   $$\forall x\in]-R;R[,\ \sum_{k=0}^{+\infty}u_kx^k=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos t}$$
   (On admettra que l'on peut intervertir l'intégrale et la somme, et que l'interversion est valide.)