Mathématiques, partiel module MM 231

Durée : *4 heures.*
Barème indicatif : *exercice : 4 pts ; problème : 14 pts ; QCM : 2 pt.*
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des calculs entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Consignes pour les copies :
rendre séparément d'une part ***l'exercice et la partie n°I du problème,***
et d'autre part ***les parties n°II et III du problème et le QCM.***

Problème :

Objectif : étudier des conditions pour que deux matrices admettent un **vecteur propre commun**.
Les parties I et II traitent chacune de cas particuliers en dimension 3.
Elles sont indépendantes l'une de l'autre.
La partie III aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun.
Les parties I et II et la partie III sont, pour une grande part, indépendantes.
Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbf{K}$ l'ensemble $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$,

$\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$,
0_n la matrice nulle d'ordre n
et I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on note :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(M) &= \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \text{ tel que } MX = 0\}, \\ \mathrm{Im}\,(M) &= \{MX,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\}, \\ &\mathrm{Sp}\,(M) \text{ le spectre de } M, \\ E_\lambda(M) &= \mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_n) \\ \text{et}\quad \mathrm{Im}_\lambda(M) &= \mathrm{Im}\,(M - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Définitions :

- Soient $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$ et $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$;
  on dit que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à A et B si :
  i) $\mathbf{e} \neq 0$;
  ii) il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$;
  iii) il existe $\mu \in \mathbf{K}$ tel que $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$;

  On définit $[A,B] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par la formule : $[A,B] = AB - BA$.

- Soient f et g, deux endomorphismes d'un $\mathbf{K}$- espace vectoriel E et $\mathbf{e} \in E$;
  on dit de même que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à f et g si :
  i) $\mathbf{e} \neq 0$;
  ii) il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$;
  iii) il existe $\mu \in \mathbf{K}$ tel que $g(\mathbf{e}) = \mu\mathbf{e}$;

  On définit l'endomorphisme $[f,g]$ de E par la formule : $[f,g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I : ÉTUDE DANS UN CAS PARTICULIER

On considère les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ où $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

I.1.

I.1.a. Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

I.1.b. En déduire le spectre de A.

I.1.c. A est-elle diagonalisable ?

I.1.d. Montrer qu'aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B.

I.2.

I.2.a. Calculer le polynôme caractéristique de B et vérifier que 2 est l'unique valeur propre de B.

I.2.b. Montrer que $\operatorname{Im}_2(B) = \operatorname{Vect}(\mathbf{u}_4)$ et que $\dim(E_2(B)) = 2$.

I.2.c. B est-elle diagonalisable ?

I.3.

I.3.a. Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \operatorname{Vect}(\mathbf{u}_5)$.

I.3.b. Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B.

I.4.

I.4.a. Calculer le polynôme caractéristique de C et vérifier que 0, 6 et -6 sont valeurs propres de C.

I.4.b. Justifier pourquoi C est semblable à la matrice D.

I.4.b. Déterminer alors le rang de C.

Pour la partie III du problème, il faut juste retenir (on ne vous demande pas de le vérifier) que $C = [A,B]$ et que, donc, le rang de $[A,B] < n = 3$.

Partie II : ÉTUDE D'UN AUTRE CAS PARTICULIER

On note $E = \mathbf{C}_2[X]$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 2.
Pour $P \in E$, on désigne par P' le polynôme dérivé de P.
Pour tout polynôme P de E, on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^2 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

II.1. Soient $(a_0,a_1,a_2) \in \mathbf{C}^3$ et $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. Calculer $g(P)$.

II.2. On admettra que que f et g sont linéaires, prouver que ce sont des endomorphismes de E.

II.3.

II.3.a. Vérifier que si P est un vecteur propre de g, alors $\deg(P) \geqslant 1$.

II.3.b. Montrer que X est un vecteur propre de g.

Soit $i \in \mathbf{N}$. f^i correspond à la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ où f est prise i fois.

II.4.

II.4.a. Vérifier que $\operatorname{Ker}(f)$ est l'ensemble des polynômes constants et que $\operatorname{Ker}(f^2) = \mathbf{C}_1[X]$.

II.4.b. Montrer que $\operatorname{Sp}(f) = \operatorname{Sp}(f^2) = \{0\}$.

II.5. Montrer que f^i et g possèdent un vecteur propre commun si et seulement si $i \geqslant 2$.

$\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de E définie par : $\mathcal{B}_c = (1,X,X^2)$..
On note A_1 la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_c$ et B_1 celle de g dans la même base.

II.6.

II.6.a. Montrer que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et en déduire l'expression de $(A_1)^2$ et $(A_1)^3$.

II.6.b. Déterminer le rang de $[(A_1)^i,B_1]$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

Partie III : ETUDE THEORIQUE

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$.

III.1. Dans cette question, on suppose que $\mathbf{e}$ est un vecteur propre commun à A et B.

III.1.a. Montrer que $\mathbf{e} \in \mathrm{Ker}([A,B])$.

III.1.b. Vérifier que $\mathrm{rg}([A,B]) < n$.

Dans toute la suite de cette partie III, on suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.
On dit que A et B vérifient la **propriété** $\mathcal{H}$ s'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A,B]).$$

III.2. Montrer que si $[A,B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

III.3. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3.a. Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$.
Montrer que BX est un élément de $E_\lambda(A)$ et que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

III.3.b. Justifier que ψ admet au moins un vecteur propre que l'on notera X_0.

III.3.c. En déduire que X_0 est un vecteur propre commun à A et B.

Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ **la propriété suivante** :

pour tout $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension k et
pour tout couple d'endomorphismes (f,g) de E tels que $\mathrm{rg}([f,g]) \leqslant 1$,
il existe un vecteur propre commun à f et g.

III.4. Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.

III.5. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_k$ **est vérifiée pour tout entier** $k \in [\![1,n-1]\!]$ et que A et B **ne vérifient pas la propriété** $\mathcal{H}$.

On note $C = [A,B]$, on suppose que $\mathrm{rg}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de A.

III.5.a. Justifier l'existence de $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.

III.5.b. Vérifier que $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ où $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$.

III.5.c. Montrer que $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$. (indication : revenir à $C = AB - BA$ et utiliser III.5.b)

III.5.d. Établir les inégalités suivantes : $1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leqslant n-1$.

Pour tout $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.

III.5.e. Montrer que $[A,A-\lambda I_n] = 0_n$ et $[B,A-\lambda I_n] = -C$.
En déduire que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

III.5.f. Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ et donc aussi pour A et B.

III.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

III.7. Déduire des parties I. et II. que que la condition nécessaire de la question III.1.b. n'est pas suffisante et que la condition suffisante de la question III.1.6. n'est pas nécessaire.

Exercice :

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^3$ et on note $\mathcal{C}an$ sa base canonique $((1;0;0),(0;1;0),(0;0;1))$. On considère l'application $<\,|\,>: E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ définie pour tous $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$ par :

$$< u|v >= 2xx' + yy' + zz' - xy' - yx'$$

1. Démontrer que $<\,|\,>$ est un produit scalaire sur E.

2. On pose $e_1 = (1;1;0)$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0;1;1)$ et $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0;-1;1)$.
Vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base ortonormale de l'espace euclidien $(E, <\,|\,>)$.

3. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans $\mathcal{C}an$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- **a.** Prouver que p est une projection.
- **b.** Déterminer les éléments propres de p.
- **c.** Justifier que la projection p est orthogonale pour le produit scalaire $<\,|\,>$.

4. On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

- **a.** Déterminer la projection orthogonale de $(1;1;1)$ sur F pour le produit scalaire $<\,|\,>$.
- **b.** Déterminer la distance de $(1;1;1)$ à F pour la norme issue du produit scalaire $<\,|\,>$..