# Corrigé CC MM232

## 1 Exercice I

1. (a) $f : t \mapsto \frac{arctant}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ avec $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^2}$ or $\int_{c>0}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann), donc $J = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
   (b) En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ (licite car de classe $C^1$ et strictement décroissante.), on a $du = -\frac{dt}{t^2}$ soit $dt = -\frac{du}{u^2}$.
   D'où $J = \int_{+\infty}^{0} \frac{arctan\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = I$.
   (c) Une primitive de $f$ est $t \mapsto \frac{1}{2}(arctant)^2$, donc
$$J = \left[\frac{1}{2}(arctant)^2\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$$
2. (a) f est dérivable et $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)-2xarctanx}{(1+x^2)^2} = \frac{1-2xarctanx}{(1+x^2)^2}$
   (b) f est continue, positive et décroissante à partir de $t = \frac{\pi}{4}$, donc $\sum \frac{arctann}{1+n^2}$ et $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature, c'est à dire elles convergent.

## 2 Exercice II

1. (a) $f : t \mapsto \frac{t^2}{\sqrt{1+t^7}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^7} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge (intégrale de Riemann) donc par équivalence $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
   (b) Par dérivation et intégration, on a :
   $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, puis $arcsin(x) \underset{0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
   On en déduit que $\frac{1}{t} - arcsin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{t^3}\right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{t^3}\right)^3\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{6t^3}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - arcsin\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ converge.
2. (a) $u_n > 0$, donc on peut utiliser le critère de D'Alembert :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ln(n+1)}{n+1} = 0 < 1$, donc $\sum u_n$ converge.
   (b) On a $|u_n| \leqslant \frac{1}{3^n}$. Or $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une série géométrique de raison entre -1 et 1 strictement donc elle converge et par majoration $\sum u_n$ converge.

## 3 Exercice III

1. (a) f est dérivable par opérations et par dérivation de la fonction ln sur $[e, +\infty[$ et $f'(t) = \frac{-(ln(t))^2-2ln(t)}{t^2(ln(t))^4}$. Une dérivée strictement négative sur $[e, +\infty[$ et donc f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.

(b) les valeurs $f(e) = \frac{1}{e}$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$ permettent de tracer une courbe sommaire de f :

(c) En constatant que $f(t) = \frac{\frac{1}{t}}{ln(t)}$, on peut calculer :

$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(ln(t))^2} = \lim_{\lambda \to +\infty} \left[\frac{-1}{ln(t)}\right]_e^{\lambda} = 1$ donc $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(ln(t))^2}$ converge.

(d) f est continue, positive et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, donc $\sum f(n)$ et $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(ln(t))^2}$ sont de même nature. Par conséquent la série converge.

2. (a) $g'(t) = \frac{-(2tlnt+t)}{(t^2lnt)^2} < 0$ sur $[e, +\infty[$, donc g est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.

(b) $\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{3}{2}} g(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{t} ln(t)} = 0$. Donc $g(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$. Or $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann) donc par négligeabilité $\int_e^{+\infty} g(t)dt$ converge.

(c) g étant continue positive et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$ donc par comparaison série-intégrale $\sum g(n)$ converge.

3. (a) f étant décroissante sur $[2, +\infty[$, donc pour tout entier $k \geqslant 2$, on a pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)ln^2(k+1)} \leqslant \frac{1}{tln(t)^2} \leqslant \frac{1}{kln^2(k)}$.

(b) En utilisant l'inégalité de droite et la relation de Chasles, on établit que : $\int_{n+1}^{N} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(ln(k))^2}$.
L'inégalité de gauche permet d'écrire :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(ln(k))^2} = \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{(k+1)(ln(k+1))^2} \leqslant \int_n^{N-1} \frac{dt}{t(ln(t))^2}$$

. D'où l'encadrement :

$$\int_{n+1}^{N} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(ln(k))^2} \leqslant \int_n^{N-1} \frac{dt}{t(ln(t))^2}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{1}{ln(n+1)} = \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(ln(k))^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t(ln(t))^2} = \frac{1}{ln(n)}$$

Ainsi par encadrement, on prouve que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(ln(k))^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{ln(n)}$

(c) Du résultat précédent on peut écrire que :
$u_n = \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(ln(k))^2}}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 ln(n)}$

(d) $\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{3}{2}} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} ln(n)} = 0$ donc $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. D'où la convergence de la série $\sum u_n$