CC du module MM 232

Durée : 2 heures.
Barème indicatif : ex. n°1 : 5 pts ; ex. n°2 : 6 pts ; ex. n°3 : 9 pts.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice n°1 : On considère les intégrales généralisées : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t^2}dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctant}{1+t^2}dt$

1. **a.** Prouver que I est convergente et la calculer.

b. Avec un changement de variable prouver que I = J.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \dfrac{arctanx}{1+x^2}$

a. Étudier les variations de f sur $[1; +\infty[$.

b. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{arctann}{1+n^2}$

Exercice n°2 :

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^7}}dt$

b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} - arcsin\left(\frac{1}{t}\right)dt$

2. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

a. $u_n = \dfrac{ln2ln3...lnn}{n!}$

b. $u_n = \dfrac{(-1)^n cos^3(4^n)}{3^n}$

Exercice n°3 :

1. On considère la fonction f définie sur $[e, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$

a. Étudier les variations de f sur $[e, +\infty[$.

b. Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[e, +\infty[$.

c. Déterminer une primitive de f sur $[e, +\infty[$.

Que peut-on en déduire concernant la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^2}$?

d. Déduire des questions précédentes la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

On considère la fonction f définie sur $[e, +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{t^2\ln(t)}$

2. **a.** Étudier les variations de g sur $[e, +\infty[$.

b. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^2\ln(t)}$?

c. Déduire des questions précédentes la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2\ln(n)}$.

3. On utilisera les résultats des questions 1. et 2. (même si vous n'avez pas répondu aux questions).

a. Soit $k \in \mathbf{N}$ avec $k \geq 3$. Encadrer $\dfrac{1}{k(\ln(k))^2}$ entre deux intégrales.

b. En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k(\ln(k))^2}$ entre deux intégrales.

4. Calculer les intégrales et en déduire un équivalent de $u_n = \dfrac{\sum\limits_{k \geq n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^2}}{n^2}$ lorsque $n \to +\infty$.

5. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$