Corrigé du CCMM231

1 Exercice 1

1. Calculer sous forme factorisée le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$$

On additionne toutes les autres colonnes à la première et on factorise par $x+6$ on obtient :

$$D = (x+5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$$

On soustrait la première ligne aux autres lignes :

$$D = (x+5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient un déterminant d'une matrice triangulaire inférieure ; d'où le résultat :

$$D = (x+5)(x-1)(x-2)(x-3)$$

2. On considère le déterminant de la matrice tridiagonale d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(a) Calculer D_2 et D_3

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. On développe par rapport à la première colonne :

$$D_3 = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

Un développement par rapport à la première colonne donne le résultat :

$$D_n = 2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Puis un développement par rapport à la première ligne donne le résultat de récurrence demandée.

(c) En déduire D_n en fonction de n.
(D_n) est une suite récurrente d'ordre 2 dont la relation de récurrence s'écrit : $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet une solution unique $r_0 = 1$. D'où le résultat : $D_n = An + B$. Les valeurs de D_2 et de D_3 permettent d'obtenir $A = B = 1$. Ainsi $D_n = n + 1$

2 Exercice 2

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la base canonique est $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$, avec :
$e_1 = (1;0;0), e_2 = (0;1;0), e_3 = (0;0;1)$.
L'endomorphisme identité de R^3 est noté Id.
On considère l'endomorphisme f de R^3 défini par :

$$\forall j \in \{1,2,3\}, \quad f(e_j) = \sum_{\substack{k \; =1 \\ k \neq j}}^{3} e_k$$

1. Préciser la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ On a : $f(e_1) = e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_3$ et $f(e_3) = e_1 + e_2$. D'où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit D la droite vectorielle de vecteur directeur $u_D = e_1 + e_2 + e_3$. Calculer $f(u_D)$
Un calcul simple donne : $f(u_D) = 2u_D$
3. On note g l'endomorphisme définie par $g = f + Id$.
(a) Préciser l'image de g. En déduire la dimension du noyau H de g.

La matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi l'ensemble image de g est $Vect(u_D)$, puis par le théorème du rang on obtient : $dimH = dim\mathbb{R}^3 - rgg = 2$

(b) Calculer f(h) pour tout vecteur $h \in H$.
Pour tout vecteur $h \in H$, on a : $f(h) = g(h) - Id(h) = -h$
4. Montrer que D et H sont supplémentaires.

On a $dimD + dimH = dim\mathbb{R}^3$, puis si $x \in D \cup H$, on a
$x = ku_D, k \in \mathbb{R}$ et $f(x) = -x$. Or $f(x) = kf(u_D) = 2ku_D$.

D'où $-ku_D = 2ku_D$, donc $k = 0$ et $x = 0$, soit $D \cap H \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est évidente du fait que $D \cap H$ est un s.e.v. Ainsi : $D \oplus H = \mathbb{R}^3$
5. Soit (v_1, v_2) une base de H.
(a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C} = (u_D, v_1, v_2)$.
On a déjà vu que $f(u_D) = 2u_D$, puis $f(v_1) = -v_1$ et $f(v_2) = -v_2$ d'après 3.(b). D'où la matrice, A', de f dans la base $\mathcal{C} = (u_D, v_1, v_2)$:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Démontrer qu'il existe deux réels a_2 et b_2 que l'on déterminera, tels que :

$$f^2 = a_2 f + b_2 Id \text{ où } f^2 = f \circ f$$

En raisonnant dans la nouvelle base, on a :

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $A'^2 = A' + 2I_3$, soit $a_2 = 1$ et $b_2 = 2$

(c) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe deux entiers a_p et b_p que l'on déterminera en fonction de p, tels que :

$$f^p = a_p f + b_p Id \text{ où } f^p = f \circ f^{p-1}$$

En procédant comme dans la question précédente :

$$A'^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^p \end{pmatrix} = a_p \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b_p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où le système : $\left\{ \begin{array}{r} 2a_p + b_p = 2^p \\ -a_p + b_p = (-1)^p \end{array} \right.$ qui donne $a_p = \frac{2^p - (-1)^p}{3}$ et $b_p = \frac{2^p + 2(-1)^p}{3}$

3 Exercice 3

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$
et soit S une matrice de cet espace vérifiant $S^2 = I_n$ (I_n étant la matrice unité.).
On pose $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } SM = MS\}$ et $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } SM = -MS\}$

1. Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On a : $S0 = 0S = 0$ donc la matrice nulle appartient à $\mathcal{C}$. De même si M et M' sont deux éléments de $\mathcal{C}$ et si $a ß \mathbb{R}$ on a :
   $$S(aM + M') = aSM + SM' = aMS + M'S = (aM + M')S$$
   Donc $aM + M' \in \mathcal{C}$ et on procède de la même façon pour montrer que $\mathcal{A}$ est un sev.
2. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que $M_1 = \frac{1}{2}(M + SMS) \in \mathcal{C}$ et que $M_2 = \frac{1}{2}(M - SMS) \in \mathcal{A}$.
   On a :
   $$M_1 S = \frac{1}{2}(MS + SMS^2) = \frac{1}{2}(S^2MS + SM) = \frac{1}{2}S(SMS + M) = SM_1$$
   De même :
   $$M_2 S = \frac{1}{2}(MS - SMS^2) = \frac{1}{2}(S^2MS - SM) = \frac{1}{2}S(SMS - M) = -SM_2$$
   Ainsi $M_1 \in \mathcal{C}$ et $M_2 \in \mathcal{A}$.
3. En déduire que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On vérifié que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont deux s.e.v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{C} + \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $M = \frac{1}{2}(M + SMS) + \frac{1}{2}(M - SMS)$, donc d'après la question précédente : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C} + \mathcal{A}$.
   Maintenant si $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{A}$, on :

   $M = S^2M = SMS = S(-MS) = -SMS$ soit $M = 0$, ainsi $\mathcal{C} \cap \mathcal{A} = \{0\}$, car $\{0\}$ est d'une manière évidente inclus dans $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}$
4. Soit Φ l'application définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :
   $$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = SMS$$
   Justifier que Φ est une symétrie vectorielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et retrouver la supplémentarité précédente.

   $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi^2(M) = SSMSS = M = Id(M)$, soit $\Phi^2 = Id$. Ainsi Φ est une involution et d'après le cours on a montré que dans ce cas Φ est une symétrie par rapport $Ker(\Phi - Id)$ parallèlement à $Ker(\Phi + Id)$ et que ces deux s.e.v sont supplémentaires.

   Or $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow SM = MS \Leftrightarrow SMS = M \Leftrightarrow M \in Ker(\Phi - Id)$.
   Et $M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow SM = -MS \Leftrightarrow SMS = -M \Leftrightarrow M \in Ker(\Phi + Id)$.
   D'où la supplémentarité de la question précédente.

4 QCM

Nom..Prénom...................

Pour chaque question cocher la bonne ou les bonnes réponse(s).
Dans tout l'exercice, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Questions	Réponses
1. si $Ker(f) \neq 0$ **alors**	☐ $det(f) \neq 0$ ☐ **f non injective** ☐ **f non surjective**
2. Le déterminant de $f^2 = f \circ f$ **est égal à**	☐ $(det(f))^2$ ☐ $2det(f)$ ☐ $\frac{1}{2}det(f)$
3. Si f est un projecteur de E, alors	☐ $E = Kerf(f) \oplus Im(f)$ ☐ **f est bijective** ☐ **f est une projection sur** $Im(f)$ **parallèlement à** $Ker(f)$
4. si $f \circ f = 0$ **alors**	☐ $det(f) = 0$ ☐ $Im(f) \subset Ker(f)$ ☐ $Ker(f) \subset Im(f)$
5. Si f est un projecteur de E, alors	☐ $det(f) = 1$ ☐ $det(f) = 0$ ☐ **Si** $y \in Im(f)$ **alors** $f(y) = y$
6. Si f est une symétrie de E, alors	☐ $det(f) = 1$ ☐ $det(f) = -1$ ☐ $det(f) = 0$