Le qcm et l'exercice 1 sont à rendre ensemble

1 Exercice 1

1. Calculer sous forme factorisée le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$$

2. On considère le déterminant de la matrice tridiagonale d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

   (a) Calculer D_2 et D_3

   (b) Montrer que :

   $$\forall n \geqslant 3, \quad D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

   (c) En déduire D_n en fonction de n.

2 Exercice 2

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la base canonique est $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$, avec :
$e_1 = (1;0;0), e_2 = (0;1;0), e_3 = (0;0;1)$.
L'endomorphisme identité de R^3 est noté Id.
On considère l'endomorphisme f de R^3 défini par :

$$\forall j \in \{1,2,3\}, \quad f(e_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} e_k$$

1. Préciser la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$
2. Soit D la droite vectorielle de vecteur directeur $u_D = e_1 + e_2 + e_3$. Calculer $f(u_D)$
3. On note g l'endomorphisme définie par $g = f + Id$.
   (a) Préciser l'image de g. En déduire la dimension du noyau H de g.
   (b) Calculer f(h) pour tout vecteur $h \in H$.
4. Montrer que D et H sont supplémentaires.
5. Soit (v_1, v_2) une base de H.
   (a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C} = (u_D, v_1, v_2)$
   (b) Démontrer qu'il existe deux réels a_2 et b_2 que l'on déterminera, tels que :

   $$f^2 = a_2 f + b_2 Id \text{ où } f^2 = f \circ f$$

   (c) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe deux entiers a_p et b_p que l'on déterminera en fonction de p, tels que :

   $$f^p = a_p f + b_p Id \text{ où } f^p = f \circ f^{p-1}$$

3 Exercice 3

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$
et soit S une matrice de cet espace vérifiant $S^2 = I_n$ (I_n étant la matrice unité.).
On pose $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $SM = MS\}$ et $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $SM = -MS\}$

1. Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que $M_1 = \frac{1}{2}(M + SMS) \in \mathcal{C}$ et que $M_2 = \frac{1}{2}(M - SMS) \in \mathcal{A}$.
3. En déduire que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit Φ l'application définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = SMS$$

Justifier que Φ est une symétrie vectorielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et retrouver la supplémentarité précédente.

4 QCM

Nom..Prénom...................

Pour chaque question cocher la bonne ou les bonnes réponse(s).
Dans tout l'exercice, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Questions	Réponses
1. si $Ker(f) \neq 0$ alors	☐ $det(f) \neq 0$ ☐ **f non injective** ☐ **f non surjective**
2. Le déterminant de $f^2 = f \circ f$ est égal à	☐ $(det(f))^2$ ☐ $2det(f)$ ☐ $\frac{1}{2}det(f)$
3. Si f est un projecteur de E, alors	☐ $E = Kerf(f) \oplus Im(f)$ ☐ **f est bijective** ☐ **f est une projection sur $Im(f)$ parallèlement à $Ker(f)$**
4. si $f \circ f = 0$ alors	☐ $det(f) = 0$ ☐ $Im(f) \subset Ker(f)$ ☐ $Ker(f) \subset Im(f)$
5. Si f est un projecteur de E, alors	☐ $det(f) = 1$ ☐ $det(f) = 0$ ☐ **Si $y \in Im(f)$ alors $f(y) = y$**
6. Si f est une symétrie de E, alors	☐ $det(f) = 1$ ☐ $det(f) = -1$ ☐ $det(f) = 0$